تصحيح

الإختبار النهائي لمقرر111 ريض	جامعة الملك سعود King Saud University — كلية العلوم - قسم الرياضيات
الفصل ~~الأول~~ 1438 / 1439 هـ الزمن: 3 ساعات الدرجة: ____ / 40	الإسم / .... الرقم الجامعي / .... أستاذ المقرر / ....

ملاحظات : 1. عدد الورقات 6   2. ممنوع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال 1	السؤال 2	السؤال 3	السؤال 4	السؤال 5	السؤال 6	السؤال 7	السؤال 8
3 درجات	14 درجة	6 درجات	3 درجات	3 درجات	درجتان	3 درجات	6 درجات

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ على الفترة $[1,9]$. (3 درجات)

بما أن f متصلة على $[1,9]$ إذن يوجد $c\in(1,9)$ بحيث

1 $\int_1^9 (x-1)^{1/3}\,dx = (9-1)\sqrt[3]{c-1}$

1 $\frac{3}{4}\left[(x-1)^{4/3}\right]_1^9 = 8\,(c-1)^{1/3}$

$\frac{3}{4}\left(\left(2^3\right)^{4/3}-0\right) = 8\,(c-1)^{1/3}$

$12 = 8\,(c-1)^{1/3} \Leftrightarrow (c-1)^{1/3} = 3/2 \Leftrightarrow (c-1) = \left(\frac{3}{2}\right)^3$

1 $c = \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 1 = \frac{35}{8} \in (1,9)$

السؤال الثاني : احسب التكاملات التالية :

(1) $\int \frac{\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ (درجتان)

1 نضع $u=\sqrt{x}$ فإن $du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

1 $\int \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \sec^2 u\,du = 2\tan u + c$

$= 2\tan(\sqrt{x}) + c, \ c\in\mathbb{R}$

Scanned by CamScanner

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-25x^2}}$ (درجتان)

نضع $u=5x$ فإن $du = 5dx$

0,5

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-25x^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{\sqrt{2^2-u^2}} = \frac{1}{5}\sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$$

1,5

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-25x^2}} = \frac{1}{5}\sin^{-1}\left(\frac{5x}{2}\right)+c.$$

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$ (درجتان)

نضع $u=e^{x}$ فإن $du = e^{x}dx$

0,5 $dx = \frac{du}{u} \Leftarrow du = u\,dx$

0,5 + 1

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+1}} = -\operatorname{csch}^{-1}(u)+c$$

$$= -\operatorname{csch}^{-1}(e^{x})+c$$

$$= -\ln\left(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)+c$$

(4) $\int \sinh^{-1}x\,dx$ (درجتان)

نستخدم التكامل بالتجزئة

$du = 1 \Rightarrow u = x$

0,5 $v = \sinh^{-1}x \Rightarrow dv = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

0,5 $$\int \sinh^{-1}x\,dx = x\sinh^{-1}x - \int \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

1 $$\int \sinh^{-1}x\,dx = x\sinh^{-1}x - \sqrt{1+x^2}+c,\ c\in\mathbb{R}$$

Scanned by CamScanner

(3 درجات) $\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}dx$ **(5)**

نستخدم اكمال المربع

1 $4x - x^2 = -[x^2 - 4x]$

$= -[(x-2)^2 - 4] = 4 - (x-2)^2$

$\sin\theta = \frac{x-2}{2}$

نفرض $x - 2 = 2\sin\theta$ فإن $dx = 2\cos\theta \, d\theta$

$x = 2 + 2\sin\theta$

$\sqrt{4x-x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2\theta} = 2\cos\theta$

1 $\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \int \frac{(2+2\sin\theta)\cancel{2}\cos\theta \, d\theta}{\cancel{2}\cos\theta} = \int (2 + 2\sin\theta)d\theta$

1 $= 2\theta - 2\cos\theta + C = 2\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - \sqrt{4x-x^2} +$

(3 درجات) $\int \frac{dx}{x^3+4x}$ **(6)**

0,5 $\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x^3+4x} = \int \frac{dx}{x(x^2+4)} = \int \left[\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}\right] d$

f دالة كسرية معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$= A\ln|x| + \frac{B}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx + C\int \frac{dx}{x^2+4}$

1 $= A\ln|x| + \frac{B}{2}\ln(x^2+4) + \frac{C}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + cst.$

حساب الثوابت: A, B, C

$A = \lim_{x\to 0} x f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+4} = 1/4$; $\boxed{A = 1/4}$

1,5 $A + B = \lim_{x\to\infty} x f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+4} = 0 \Rightarrow \boxed{B = -1/4}$

$f(1) = \frac{1}{5} = A + \frac{B+C}{5} \Leftrightarrow 5A + B + C = 1 \Rightarrow \boxed{C = 0}$

السؤال الثالث:

(3 درجات) . $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ احسب (أ)

0,5 $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = 1^{\infty}$ (صيغة عدم تعيين)

0,5 $\ln\left(x^{1/1-x}\right) = \frac{1}{1-x}\ln x$; $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \frac{0}{0}$

1 $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}$ بتطبيق لوبيتال $= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x(-1)} = -1$

1 $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ وبالتالي

Scanned by CamScanner

(ب) بيّن فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2} dx$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب) . (3 درجات)

0,5 $\int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2} dx = \lim_{t \to +\infty} \left(\int_0^t x\, e^{-x^2} dx \right)$

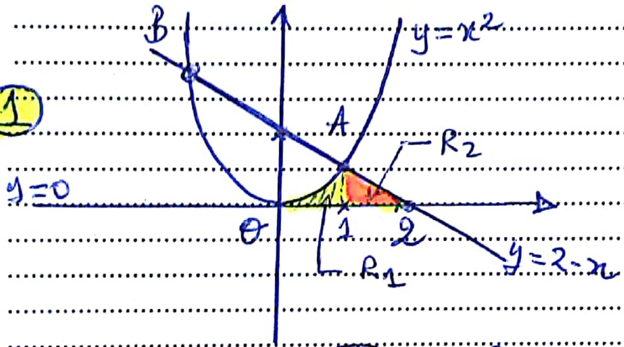
1 $-\frac{1}{2}\int_0^t -2x\, e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2} \right]_0^t = -\frac{1}{2}\left[e^{-t^2} - 1 \right]$

1,5 $\lim_{t \to +\infty} -\frac{1}{2}\left[e^{-t^2} - 1 \right] = 1/2 \quad \left(\lim_{t \to +\infty} e^{-t^2} = 0 \right)$

وبالتالي $\int_0^{\infty} x\, e^{-x^2} dx$ متقارب وقيمته $1/2$

السؤال الرابع : ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = x^2$, $y = 2-x$ و $y = 0$ ثم جد مساحتها. (3 درجات)

1



نقاط التقاطع:

$y = x^2 = 2 - x$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x-1)(x+2) = 0$

$A \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ و $B \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$

المنطقة:

$R = R_1 \cup R_2$

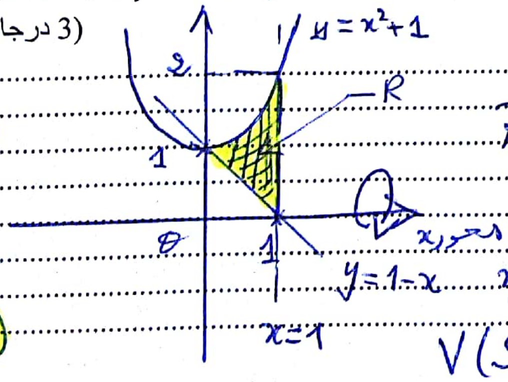
مساحتها

2 $R = \left\{ (x,y) / \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^2 \end{matrix} \right\} \cup \left\{ (x,y) / \begin{matrix} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2-x \end{matrix} \right\}$

$A(R) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2-x)\, dx = 1/3 + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

السؤال الخامس: جد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2 + 1$, $y = 1-x$ و $x = 1$ حول المحور (Ox) . (3 درجات)

1



المنطقة R هي

$R = \left\{ (x,y) / \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ (1-x) \le y \le (x^2+1) \end{matrix} \right\}$

نستخدم طريقة الأقراص الأسطوانية لحساب حجم الجسم الناتج S عن دوران R حول Ox

1 $V(S) = \pi \int_0^1 \left[(x^2+1)^2 - (1-x)^2 \right] dx$

1 $V(S) = \pi \int_0^1 \left[x^4 + 2x^2 + 1 - (x^2 - 2x + 1) \right] dx$

$V(S) = \pi \int_0^1 \left[x^4 + x^2 + 2x \right] dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = \pi \frac{23}{15}$

Scanned by CamScanner

السؤال السادس: جد طول القوس $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ من $x = 1$ إلى $x = 2$. (درجتان)

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{x}$$

1

$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]^2 = 1 + \frac{1}{4}\left[x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right]$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2} = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2$$

فإن طول القوس المنحني

1

$$L(f) = \int_1^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + \ln x\right] = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln$$

السؤال السابع: جد مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران بيان المنحنى $y = x^3$ على الفترة $[0,2]$ حول المحور (Ox).
(3 درجات)

مساحة سطح الجسم هي

$$A.S = 2\pi \int_0^2 |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$f'(x) = 3x^2 \quad \text{فإن} \quad f(x) = x^3$$

1

$$A.S = 2\pi \int_0^2 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx$$

$$u = 1 + 9x^4 \quad \text{نضع}$$
$$du = 36x^3\, dx$$

2

$$A.S = \frac{2\pi}{36}\int_1^{145} u^{1/2}\, du = \frac{2\pi}{36} \times \frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^{145}$$

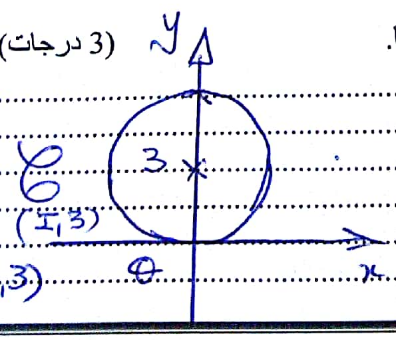
$$= \frac{\pi}{27}\left[(145)^{3/2} - 1\right]$$

16
144

السؤال الثامن :

(أ) حوّل المعادلة الديكارتية $x^2 + (y-3)^2 = 9$ إلى القطبية ثم تعرف على بيانها. (3 درجات)

1



$I = (0,3)$

$$(*) \quad x^2 + (y-3)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9$$

$$x^2 + y^2 = 6y$$

$$r^2 = 6r\sin\theta$$

وبالتالي (*) تكتب بالإحداثيات القطبية

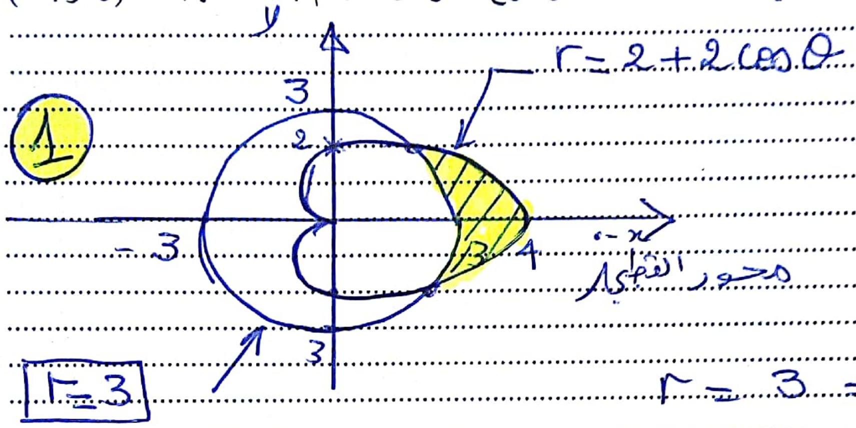
$$\boxed{r = 6\sin\theta}$$

هي معادلة لدائرة مركزها I ونصف قطرها 3.

2

Scanned by CamScanner

(ب) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى القلبي $r = 2+2\cos\theta$ وخارج الدائرة $r = 3$ ثم جد مساحتها. (3 درجات)



نقاط التقاطع:

$r = 3 = 2+2\cos\theta$

$\cos\theta = 1/2$

$\theta = \pm \pi/3$

المنطقة R هي

فإن مساحتها $R = \{(r,\theta) / -\pi/3 \le \theta \le \pi/3,\ 3 \le r \le 2+2\cos\theta\}$

0.5

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left[(2+2\cos\theta)^2 - 9\right]d\theta$$

0.5

$$A(R) = \int_{0}^{\pi/3}\left[(2+2\cos\theta)^2 - 9\right]d\theta$$

1

$$A(R) = \int_{0}^{\pi/3}\left[4\cos^2\theta + 8\cos\theta - 5\right]d\theta = \int_{0}^{\pi/3}\left[4\left[\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right] + 8\cos\theta - 5\right]d\theta$$

$$A(R) = \frac{4}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/3} + 8\left[\sin\theta\right]_0^{\pi/3} - \frac{5\pi}{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \pi > 0$$

Scanned by CamScanner