41

جامعة الملك سعود- كلية العلوم قسم الرياضيات	الإ متحان النهائي للمقرر(209) ريض الفصل الثاني ١٤٣٩/١٤٤٠ هـ	بوم الاثنين [illegible]/٨/١٤[illegible] هـ الزمن : ثلاث ساعات .

5 (4)

السؤال الأول (٤) أ) اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية :

$$\left\{\frac{(-1)^n+4n}{n^2+2}\right\}_{n=1}^{\infty} \;،\; \left\{\frac{n^2}{n-2}-\frac{n^2}{n-3}\right\}_{n=1}^{\infty} \;،\; \left\{\frac{n^2+3n+4}{\ln(n^2+2)}\right\}_{n=1}^{\infty} .$$

ب) برهن أن المتسلسلة التالية متقاربة وما هو مجموعها؟ $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)n}\right)$.

السؤال الثاني (١٠) : أ) اختبر التقارب ، التقارب المطلق ، التقارب الشرطي أو التباعد للمتسلسلات التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{n^2} \;،\; \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n+1)^2} \;،\; \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+5}{n.4^n} \;،$$

ب) أوجد متسلسلة القوى في x للدالة $sinhx=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ ثم استنتج قيمة النهاية التالية : $\lim_{x\to\infty}\frac{sinhx}{x}$.

ج) أوجد الحدود الأربعة الأولى لمتسلسلة تايلور للدالة : $f(x)=\sqrt{x+2}$ ، حيث $c=-1$.

3

السؤال الثالث (١٠) : أ) أوجد متسلسلة فورييه cosine للدالة $f(x)=1-x^2$ على الفترة $(0\ ,\ 1)$. استنتج من المتسلسلة وعند $x=\frac{1}{2}$ صحة المعادلة التالية :

$$\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

ب) لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\begin{cases}-1 & ;\ -2\le x\le 0\\ 2 & ;\ 0<x\le 2\\ 0 & ;\ |x|>2\end{cases}$.

١) ارسم الدالة على $\mathbb{R}$. ، ٢) أوجد تكامل فورييه للدالة f .

السؤال الرابع (٨) : أ) إذا كانت $f(x,y) = xy\sin(\frac{1}{x} - \frac{1}{y})$ حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$.

تحقق من صحة المعادلة التالية : $x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y} = (x+y)f$.

ب) أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية : $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx - xdy = 0$ ، حيث $x > 0$ و $y > 0$.

السؤال الخامس (٨) : أ) برهن أن $y = e^x$ عامل تكميل للمعادلة التفاضلية التالية :

$y(x+y+1)dx + (x+2y)dy = 0$ ثم أوجد حلها.

ب) أوجد حل المسألة التفاضلية التالية :

$$\begin{cases} xdy + (xy + 2y - 2e^{-x})dx = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

، حيث $x > 0$.

الامتحان النهائي (٢٠٨ رضي)
الفصل الثاني ١٤٤٠هـ

السؤال الأول : أ) (5)

1) $0 \le \left| \frac{(-1)^n + 4n}{n^2+2} \right| \le \frac{1+4n}{n^2}$, $f(x) = \frac{1+4x}{x^2}$, $x \ge 1$

(1)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+4x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{2x} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1+4n}{n^2} = 0$$

وحسب نظرية الحصر لدينا

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n + 4n}{n^2+2} \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+4n}{n^2+2} = 0$$

المتتالية متقاربة

2) (1)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n-2} - \frac{n^2}{n-3} \right) \quad \infty - \infty \text{ (عدم تعيين)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3} - 3n^2 - \cancel{n^3} + 2n^2}{(n-2)(n-3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2-5n+6} = -1$$

المتتالية متقاربة

3) $x \ge 1$ ، $f(x) = \frac{x^2+3x+4}{\ln(x^2+2)}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+4}{\ln(x^2+2)} = \lim \frac{2x+3}{\frac{2x}{x^2+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x+3)(x^2+2)}{2x}$

(1)

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\left(\frac{2x+3}{2x}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(\frac{x^2+2}{1}\right)}_{\to \infty} = \infty$$

ومنه $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+4}{\ln(n^2+2)} = \infty$ ، المتتالية متباعدة

ب) $x \ge 2$ $\frac{1}{(x-1)(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} \Rightarrow (A+B)x - B = 1$

(1)

ومنه $B = -1$ ، $A = 1$ ومنه

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$S_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n-2}} - \cancel{\tfrac{1}{n-1}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n-1}} - \tfrac{1}{n}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n}$

(1)

$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$

$$\boxed{\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 1}$$

اي ان المتسلسلة متقاربة ومجموعها ١

السؤال الثاني :

(10) 1) نستخدم اختبار النسبة

$$a_n=\frac{(2n+1)!}{n^2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+3)!}{(n+1)^2}}{\frac{(2n+1)!}{n^2}}$$

(1)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!\,n^2}{(n+1)^2\,(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{(2n+3)(2n+2)}_{\to\infty}\cdot\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}_{\to 1}=\infty$$

$$=\infty$$

إذاً المتسلسلة $\sum_1^\infty \frac{(2n+1)!}{n^2}$ متباعدة

2) $u_n=(-1)^n\frac{3n+5}{n\,4^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n+8}{(n+1)4^{n+1}}}{\frac{3n+5}{n\,4^n}}=\lim\left(\frac{3n+8}{3n+5}\right)\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)\cdot\frac14$$

(1)

$$=(1)(1)\left(\frac14\right)=\frac14<1$$

المتسلسلة $\sum_1^\infty(-1)^n\frac{3n+5}{n\,4^n}$ متقاربة مطلقاً

3) $f(x)=\frac{x}{(2x+1)^2}$ ، $x\geq 1$ ، لدينا $\lim_{x\to\infty}f(x)=0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(2n+1)^2}=0$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)^2-x(4)(2x+1)}{(2x+1)^4}=\frac{(2x+1)-4x}{(2x+1)^3}$$

(1)

$$f'(x)=\frac{1-2x}{(2x+1)^3}<0$$

$$1-2x<0 \Leftarrow 2x>x\geq 1$$

لدينا

ومنه $(a_n)=\left(\frac{n}{(2n+1)^2}\right)$ متناقصة وبالتالي المتسلسلة $\sum_1^\infty(-1)^n\frac{n}{(2n+1)^2}$ متقاربة

ولكن

$$\sum_1^\infty\left|(-1)^n\frac{n}{(2n+1)^2}\right|=\sum_1^\infty \underbrace{\frac{n}{(2n+1)^2}}_{a_n}\simeq\sum_1^\infty\frac{n}{4n^2}$$

(1)

او $\simeq \sum_1^\infty \frac1n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(2n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2=\frac14>0 \quad b_n$$

وبما أن $\sum_1^\infty\frac1n$ متباعدة إذاً $\sum_1^\infty(-1)^n\frac{n}{(2n+1)^2}$ متقاربة مشروطاً

ب)

②
$$e^x=\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$
$$e^{-x}=\sum\frac{(-1)^n x^n}{n!}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\dots+\frac{(-1)^n x^n}{n!}+\dots$$
$$\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\frac{1}{2}\left[2x+2\frac{x^3}{3!}+2\frac{x^5}{5!}-\dots+2\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right.$$
$$\boxed{\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots}\quad x\in\mathbb{R}$$

① $x\neq 0$,
$$\frac{\sinh x}{x}=1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots\right)=1.$$

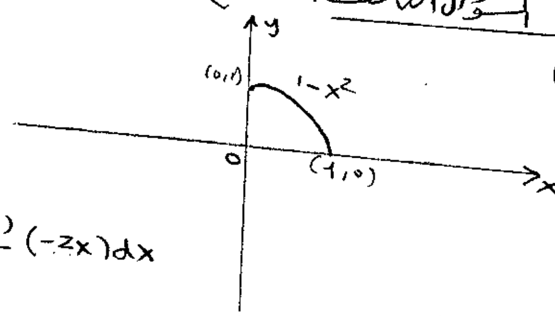
أ-

③
$$f(x)=(x+2)^{1/2},\quad f(-1)=1$$
$$f'(x)=\frac{1}{2}(x+2)^{-1/2},\quad f'(-1)=\frac{1}{2}$$
$$f''(x)=\frac{-1}{4}(x+2)^{-3/2},\quad f''(-1)=-\frac{1}{4}.$$
$$f'''(x)=\frac{3}{8}(x+2)^{-5/2},\quad f'''(-1)=\frac{3}{8}.$$
$$f(x)=\sqrt{x+2}=1+\frac{1}{2}\frac{(x+1)}{1!}-\frac{1}{4}\frac{(x+1)^2}{2!}+\frac{3}{8}\frac{(x+1)^3}{3!}+\dots$$
$$\sqrt{x+2}=1+\frac{(x+1)}{2}-\frac{(x+1)^2}{8}+\frac{(x+1)^3}{16}+\dots$$

السؤال الثالث: أ)

(10)

$$a_0=\frac{2}{1}\int_0^1(1-x^2)\,dx=2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1\qquad (0,1),\ T=1$$
① $$a_0=2\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$$



$$a_n=2\int_0^1(1-x^2)\cos(n\pi x)\,dx$$

②
$$2\left[(1-x^2)\cancel{\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}}\right]_0^1-2\int_0^1\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}(-2x)\,dx$$
$$=4\int_0^1 x\,\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\,dx=4\left[-x\frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_0^1+4\int_0^1\frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\,dx$$
$$a_n=-4\frac{\cos(n\pi)}{n^2\pi^2}+4\left[\cancel{\frac{\sin(n\pi x)}{n^3\pi^3}}\right]_0^1$$
$$\boxed{a_n=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}}$$

① $$\boxed{f(x)=1-x^2=\frac{2}{3}+\sum_1^\infty\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)}\quad 0<x<1$$

[illegible] $x=\frac{1}{2}$ [illegible]

$$1-\frac{1}{4}=\frac{2}{3}+\sum_{1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)=0 \quad , \cos\left(\frac{2m}{2}\pi\right)=(-1)^n$$

[illegible]

1

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\sum_{1}^{\infty}\frac{4(-1)^{2n+1}}{(2n)^2\pi^2}\cos\left(\frac{2n}{2}\pi\right)$$

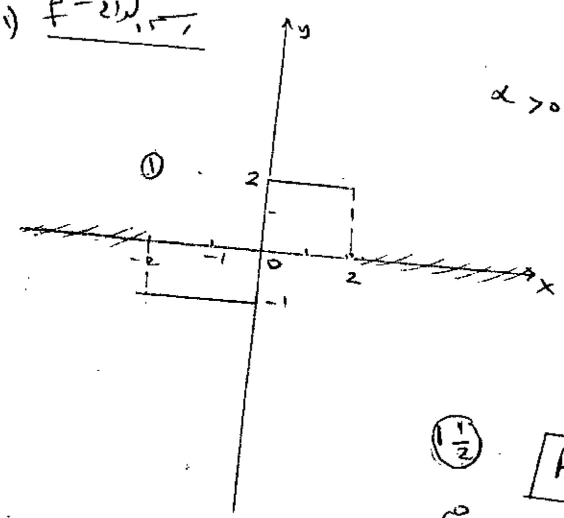
$$\frac{1}{12}=\sum_{1}^{\infty}\frac{(4)(-1)(-1)^n}{4n^2\pi^2}$$

$$\boxed{\frac{\pi^2}{12}=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}}$$

---

1) [illegible]

1



(ب

2) $\alpha>0$, $A(\alpha)=\int_{-2}^{0}(-1)\cos(\alpha x)\,dx + \int_{0}^{2}2\cos\alpha x\,dx$

$$A(\alpha)=-\left[\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right]_{-2}^{0}+2\left[\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right]_{0}^{2}$$

$$=+\frac{\sin(-2\alpha)}{\alpha}+2\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}$$

$$=-\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}+2\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}$$

$1\frac{1}{2}$ $\boxed{A(\alpha)=\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}}$

$$B(\alpha)=\int_{-2}^{0}(-1)\sin\alpha x\,dx+2\int_{0}^{2}\sin\alpha x\,dx=\left[\frac{\cos\alpha}{\alpha}\right]_{-2}^{0}-2\left[\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right]_{0}^{2}$$

$$B(\alpha)=\frac{1-\cos(-2\alpha)}{\alpha}-2\,\frac{\cos(2\alpha)-1}{\alpha}$$

$1\frac{1}{2}$ $\boxed{B(\alpha)=\frac{3(1-\cos(2\alpha))}{\alpha}}$

1 $$\boxed{\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}\cos(\alpha x)+3\,\frac{1-\cos(2\alpha)}{\alpha}\sin\alpha x\right]d\alpha}$$

السؤال الرابع :

أ) 8

$f(x,y) = xy\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right); \quad x \neq 0, \; y \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) + (xy)\left(\frac{-1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$

$1\frac{1}{2}$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = y\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) - \frac{y}{x}\cos\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) + (xy)\left(\frac{1}{y^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$

$1\frac{1}{2}$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = x\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) + \frac{x}{y}\cos\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}$

1 $x^2 f_x + y^2 f_y = x^2 y\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) + xy^2\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$

$= xf + yf = (x+y)f$

ب) المعادلة متجانسة، نفرض أن $\frac{y}{x} = u$, $y = xu$, $y>0$, $x>0$

1 $dy = x\,du + u\,dx$

$\left(2\frac{\sqrt{xy}}{x} - \frac{y}{x}\right)dx - dy = 0$

$\left(2\sqrt{\frac{xy}{x^2}} - \frac{y}{x}\right)dx - dy = \left(2\sqrt{y/x} - \frac{y}{x}\right)dx - dy = 0$

$1\frac{1}{2}$ $(2\sqrt{u} - u)dx - x\,du - u\,dx = 0$

$(2\sqrt{u} - 2u)dx - x\,du = 0$

$\frac{du}{2\sqrt{u}(1-\sqrt{u})} - \frac{dx}{x} = 0 \quad (1 \neq \sqrt{u} \iff 1 \neq u \iff y \neq x)$

$1\frac{1}{2}$ $-\ln|1-\sqrt{u}| - \ln x = -c$

$\ln x|1-\sqrt{u}| = c$ or $x\left|1-\sqrt{\frac{y}{x}}\right| = e^c = c_1$

$\boxed{|x - \sqrt{yx}| = c_1}$

السؤال الخامس:

⑧ أ

$$e^{x}\left((xy+y^2+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0\right)$$

$$\underbrace{(xe^{x}y+y^2e^{x}+ye^{x})}_{M}dx+(\underbrace{xe^{x}+2e^{x}y}_{N})dy=0$$

① $$\frac{\partial M}{\partial y}=xe^{x}+2ye^{x}+e^{x},\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=xe^{x}+e^{x}+2e^{x}y.$$

اذن المعادلة أصبحت تامة، اذن توجد دالة F في x، y بحيث يكون

$$\frac{\partial F}{\partial x}=xe^{x}y+y^2e^{x}+ye^{x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=xe^{x}+2e^{x}y.$$

$1\frac{1}{2}$ $$\int\frac{\partial F}{\partial y}\,dy=F(x,y)=\int(xe^{x}+2e^{x}y)\,dy$$

$$=xe^{x}y+y^2e^{x}+\phi(x)$$

$1\frac{1}{2}$ $$\frac{\partial F}{\partial x}=\cancel{e^{x}y}+\cancel{xe^{x}y}+\cancel{y^2e^{x}}+\phi'(x)=\cancel{xe^{x}y}+\cancel{y^2e^{x}}+\cancel{ye^{x}}$$

$$\phi'(x)=0\Rightarrow\quad\phi(x)=c$$

اذن حل المعادلة هو مجموعة المنحنيات التالية

$$\boxed{ye^{x}(x+y)+c=0}$$

ب

$$x\frac{dy}{dx}+y(x+2)-2e^{-x}=0$$

$1\frac{1}{2}$ معادلة خطية $$y'+\frac{x+2}{x}y=\frac{2}{x}e^{-x}\quad;\quad x>0$$

$$P(x)=1+\frac{2}{x},\quad \mu(x)=e^{\int(1+\frac{2}{x})dx}=e^{x+\ln x^2}=x^2e^{x}$$

$1\frac{1}{2}$ $$y\mu(x)=yx^2e^{x}=\int\mu(x)\cdot\frac{2}{x}e^{-x}dx$$

$$yx^2e^{x}=\int x^2e^{x}\frac{2}{x}e^{-x}dx=\int 2x\,dx=x^2+c$$

اذن حل المعادلة التفاضلية الخطية هو الحل العام

$$\boxed{y=\frac{1}{x^2e^{x}}(x^2+c)=e^{-x}+\frac{1}{x^2}e^{-x}c}$$

وحسب الشرط الابتدائي لدينا $y=0$ ، $x=1$ إذاً

$$0 = e^{-1} + e^{-1}c \Rightarrow c = -1$$

(١)

وبالتالي يكون حل المعادلة التفاضلية هو الخاص:

$$\boxed{y = e^{-x} - \frac{1}{x^2}e^{-x} = e^{-x}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}$$