جامعة الملك سعود King Saud University	كلية العلوم - قسم الرياضيات	اختبار النهائي 487 ريض الفصل الصيفي 1438-1439 هـ

الجزء الأول (13 درجات): (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة)

(1) إذا كان $|z|=1$ و $z \neq \pm 1$, فجد زاوية العدد المركب $w = \dfrac{z-1}{z+1}$. (درجتان)

(2) حل المعادلات في $\mathbb{C}$ التالية :

(أ) $z^2 - 3 = 4i$. (درجتان)

(ب) $\sinh z = i$. (درجة)

(3) أوجد القيمة الرئيسة لـ $Log(1-i\sqrt{3})$, $Log(-1+i)$ و $(1-i\sqrt{3})^{(-1+i)}$. (3 درجات)

(4) لتكن a,b,c أعداد حقيقية و $P(x,y) = a x^2 + 2b\, xy + c\, y^2$ (كثيرة حدود متجانسة من الدرجة 2).

(أ) أوجد شرط لازم و كافي لـ a,b,c بحيث $P = \Re e(f)$ لدالة كلية f . (درجتان)

(ب) لنفترض أن الشرط تحقق فاوجد جميع الدوال الكلية بحيث $P = \Re e(f)$. (3 درجات)

الجزء الثاني (14 درجات): (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة)

(1) احسب $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2}$. (3 درجات)

(2) جد $\displaystyle\sup_{|z|\leq 3} \left| \frac{z-i}{9+i\,z} \right|$. (3 درجات)

(3) جد صيغة دالة كلية f بحيث $f(\mathbb{C}) = D(O,1)$. ($D(O,1)$ هو القرص الوحدة المفتوح) (درجتان)

(4) أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(z) = (1+z)^{\alpha}$ حيث α عدد مركب. (3 درجات)

(5) أوجد متسلسلة لورانت للدالة $g(z) = \dfrac{1}{z+z^2}$ على الطوق المفتوح $A = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z| < 1\}$. (3 درجات)

الجزء الثالث (13 درجة): (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة)

(1) على ماذا ينصّ مبدأ الامتداد التحليلي ؟ (درجتان)

(2) جد دالة f تحليلية في جوار الصفر و تحقق الشرط $f\left(\frac{1}{n}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)$. (درجتان)

(3) استخدم نظرية الرواسب لاثبات أن :

(أ) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{7+\sin\theta}=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. (3 درجات)

(ب) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{3}$. (3 درجات)

(ج) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(3x)}{(x^2+4)^2}dx=\frac{7\pi}{32}e^{-6}$. (3 درجات)

تصحيح الاختبار النهائي ٤٨٧ ريض د/برهان

للفصل الصيفي ٣٨/ ١٤٣٩هـ

الجزء الأول (13 درجة)

(1) بما أن $|z|=1$ فإن $z=e^{i\theta}$

(1) $$W=\frac{z-1}{z+1}=\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}=\frac{e^{i\theta/2}\left[e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}\right]}{e^{i\theta/2}\left[e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}\right]}$$

$$W=\frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\pi/2}.$$

(1) بالتالي زاوية W هي $\frac{\pi}{2}$

(2) (أ) $z^2-3=4i \iff z^2=3+4i$

$z=x+iy$ فإن $z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$; $|z|^2=|3+4i|=5$

(1) $$\begin{cases} x^2-y^2=3\\ 2xy=4\\ x^2+y^2=5\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2=4\\ x=\pm 2\\ y=\pm 1\end{array}$$

(1) $S_{\mathbb{C}}=\{\pm(2+i)\}$

(ب) $\sinh z=i \Rightarrow \frac{e^z-e^{-z}}{2}=i \Leftrightarrow e^z-e^{-z}=2i$

$(e^z)^2-2ie^z-1=0$

$u^2-2iu-1=0$ (1)

$a=1$; $b=-2i$; $c=-1$

$\Delta=b^2-4ac=-4+4=0$

$u_{1,2}=\frac{2i}{2}=i$

$e^z=i$

$z=\log i=\ln|i|+i\arg(i)$

$z_k=i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) / k\in\mathbb{Z}\right\}$$

(3) $1-i\sqrt{3}=2e^{-i\pi/3}$ فإن $\mathrm{Log}(1-i\sqrt{3})=\ln 2-i\frac{\pi}{3}$ (1)

$-1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ فإن $\mathrm{Log}(-1+i)=\ln(\sqrt{2})+i\frac{3\pi}{4}$ (1)

(1) $$(1-i\sqrt{3})^{(-1+i)}=e^{(-1+i)\mathrm{Log}(1-i\sqrt{3})}$$

$$=e^{(-1+i)(\ln 2-i\frac{\pi}{3})}=e^{\frac{\pi}{3}-\ln 2}\cdot e^{i(\ln 2+\frac{\pi}{3})}$$

4) أ) نعلم أن $Re f$ هي دالة توافقية (Harmonic function)

$\Delta P(x,y) \equiv 0$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = 2a \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2ax + 2by$$

1 $$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 2c \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2bx + 2cy$$

$$\Delta P(x,y) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 2a + 2c = 0$$

وبالتالي الشرط اللازم والكافي لكي $P = Re f$

1 هو $\boxed{a + c = 0}$

ب) نفترض أن $a + c = 0$ فإن

$$P(x,y) = ax^2 + 2bxy - ay^2$$

$f = Re f + i\, Im f = P + iQ$ كلية فإن f تحقق

معادلتي كوشي-ريمان

1 $$* \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 2ax + 2by & (1) \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = 2bx - 2ay & (2) \end{cases}$$

بتكامل طرفي المعادلة (1) بالنسبة لـ y

$$Q(x,y) = \int (2ax + 2by)\, dy$$

1 $$Q(x,y) = 2axy + by^2 + \alpha(x)$$

باشتقاق طرفي هذه المعادلة بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2ay + \alpha'(x) \overset{(2)}{=} 2ay - 2bx$$

$\alpha(x) = -bx^2 + cst$ يعني $\alpha'(x) = -2bx$ نجد

عندئذ

$$Q(x,y) = 2axy + by^2 - bx^2 + cst$$

فإن $f(x+iy) = (ax^2 + 2bxy - ay^2) + i(by^2 - bx^2 + 2axy + cst)$

نعلم أن $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

1 $$f(z) = (a - ib)z^2 + i\,cst.$$

الجزء الثاني (14 درجة)

(1) نستخدم صيغة كوشي التكاملية

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$ حيث z_0 تقع داخل γ
و f تحليلية داخل γ

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2-5z+2}$$

$$2z^2-5z+2 = 0$$
$a=2$; $b=-5$; $c=2$
$$\Delta = b^2-4ac = 25-16 = 9 = 3^2 > 0$$

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$ (تقع داخل قرص الوحدة)

$$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+3}{4} = 2$$ (تقع خارج قرص الوحدة) (1)

$$2z^2-5z+2 = 2(z-z_1)(z-z_2)$$; $(z_1-z_2) = \frac{1}{2}-2 = -3/2$

$f(z) = \frac{1}{2(z-z_2)}$ (2)
تحليلية داخل قرص الوحدة

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2(z-z_2)}}{(z-z_1)}\,dz = 2\pi i\,\frac{1}{2(z_1-z_2)} = \pi i\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$I = \oint_{|z|=1}\frac{dz}{2z^2-5z+2} = -\frac{2\pi i}{3}.$$

(2) نضع $f(z) = \frac{z-i}{9+iz}$ تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{9i\}$

و بالتالي f تحليلية على $\overline{D(0,3)} = \{|z|\le 3\}$

باستخدام مبدأ القيمة العظمى للمقياس $|f|$ لدينا (1)

$$\sup_{|z|\le 3}\left|\frac{z-i}{9+iz}\right| = \sup_{|z|=3}\left|\frac{z-i}{9+iz}\right|$$;

$|z|^2=9 \Leftrightarrow |z|=3$
$z\bar{z}=9$
$z = 9/\bar{z}$

$$\sup_{|z|\le 3}\left|\frac{z-i}{9+iz}\right| = \sup_{|z|=3}\left|\frac{9/\bar{z}-i}{9+iz}\right|$$
$$= \sup_{|z|=3}\frac{1}{|z|}\left|\frac{9-i\bar{z}}{9+iz}\right| = \frac{1}{3}.$$ (2)

نضع $w = 9-i\bar{z}$
$\bar{w} = 9+iz$
و بالتالي $\left|\frac{\bar{w}}{w}\right|=1$
$|\bar{z}|=|z|$

③ بما أن $|f(z)|\leq 1$ يعني f محدودة و f كلية باستخدام نظرية ليوفيل f هي دالة ثابتة. ②

④ f تحليلية في جوار الصفر

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$ لكل z في جوار الصفر

① حيث α عدد مركب

$f(z)=(1+z)^{\alpha}$; $f(0)=1$

$f'(z)=\alpha(1+z)^{\alpha-1}$; $f'(0)=\alpha$

$f''(z)=\alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}$; $f''(0)=\alpha(\alpha-1)$

$\vdots$

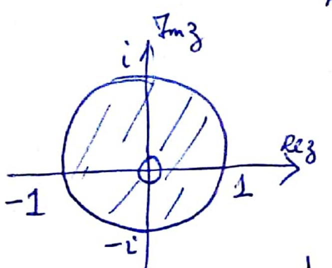
$f^{(n)}(z)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}$; $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$

و بالتالي

$(1+z)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n$ لكل z في جوار الصفر ②

$(1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}z^3+\cdots$ لكل z في جوار الصفر

⚠ تعميم لصيغة ذو الحدين. $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ (n عدد طبيعي)



⑤ $g(z)=\frac{1}{z+z^2}$ تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{-1,0\}$

بما أن $\{-1,0\}\notin A$ فإن g تحليلية

بمفكوك لورانت ①

$g(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n z^n$ لكل $0<|z|<1$

ولنبحث عن المعاملات a_n :

$g(z)=\frac{1}{z+z^2}=\frac{1}{z(1+z)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}$ لكل $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1,0\}$

بما أن $|z|<1$ فإن $\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$ ①

و بالتالي لكل $0<|z|<1$

$g(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}z^n=\frac{1}{z}-1+z-z^2+\cdots$

① $a_n=\begin{cases}1 ; & n=-1\\ 0 ; & n\leq -2\\ (-1)^{n+1} ; & n\geq 0\end{cases}$

الجزء الثالث (13 درجة)

① لتكن f دالة تحليلية على نطاق D وأن $\{z_n\}$ متتالية من النقاط المختلفة والتي تتقارب إلى نقطة z_0 في D

إذا كان $f(z_n)=0$ لكل $n \geq N$ (N عدد معين طبيعي) فإن

2

$f \equiv 0$ لكل z في جوار z_0.

② نأخذ $h(z) = f(z) - \sin\left(\frac{\pi z}{2+z}\right)$ دالة تحليلية في جوار الصفر. المتتالية $\{\frac{1}{n}\}$ متقاربة للصفر

1

لـ n يعني تنتمي في جوار الصفر ابتداء من عدد معين طبيعي N)

لدينا

$$h\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{\pi/n}{2+1/n}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) = 0$$

باستخدام مبدأ الامتداد التحليلي $h \equiv 0$ في جوار الصفر

وبالتالي $f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{z+2}\right)$ على $|z|<2$.

1

③ (أ)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{7+\sin\theta} \overset{?}{=} \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

نعلم أن $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ لذا نأخذ $z = e^{i\theta}$ فإن z تقع على دائرة الوحدة $\{|z|=1\}$.

$$dz = ie^{i\theta}d\theta$$

$$dz = iz\,d\theta$$

يعني $d\theta = \frac{dz}{iz}$

1

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{7+\sin\theta} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left[7+\frac{z^2-1}{2iz}\right]}$$

Scanned by CamScanner

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{2\,dz}{z^2+14iz-1}$$

نظرية الرواسب

$$= 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \mathrm{Res}\left[\frac{2}{z^2+14iz-1} ; z_k\right]$$

نضع

$$f(z) = \frac{2}{z^2+14iz-1} = \frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

$$z^2+14iz-1=0$$

$a=1 ;\ b=14i ;\ c=-1$

فان المميز

$$\Delta = b^2-4ac = -196+4 = -192 = (8i\sqrt{3})^2$$

$$z_1 = \frac{-14i-8i\sqrt{3}}{2} = -7i-4i\sqrt{3} = -(7+4\sqrt{3})i$$

$$z_2 = \frac{-14i+8i\sqrt{3}}{2} = -7i+4i\sqrt{3} = (4\sqrt{3}-7)i$$

الأقطاب بسيطة لـ f.

1

$$|z_1 z_2| = \left|\frac{c}{a}\right| = 1$$

نرى أن $|z_1|>1$

فان $|z_2|<1$

$$\mathrm{Res}(f, z_2) = \lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z) = \frac{2}{z_2-z_1}$$

1

$$\boxed{\mathrm{Res}(f, z_2) = \frac{2}{8\sqrt{3}\,i}}$$

و بالتالي

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{2\,dz}{z^2+14iz-1} = 2\pi \cancel{i} \times \frac{2}{8\sqrt{3}\,\cancel{i}}$$

$$I = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

ب)

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} \overset{?}{=} \frac{\pi}{3}$$

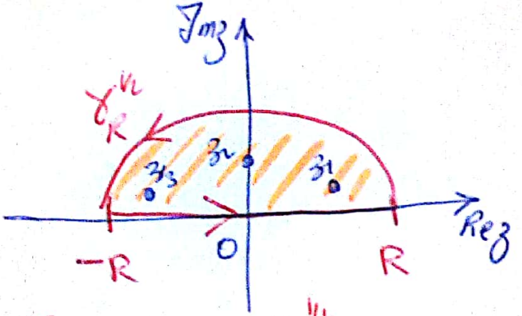
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \int_{\mathbb{R}} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

متقارب لأن $\deg Q \geq \deg P+2$ و Q ليس له جذور حقيقية.

ندرس الدالة $f(z) = \frac{1}{1+z^6}$ علىداخل المسار Γ_R

المغلق الموجب حيث $\Gamma_R = [-R, R] \cup \gamma_R$ حيث $R \gg 1$

باستخدام نظرية الرواسب



$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{Im z_k>0} Res(f; z_k)$$

$\Gamma_R = [-R,R] \cup \gamma_R^{1/2}$

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\,d\theta$$

باستخدام مبرهنة جوردان :

$$\left| \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\,d\theta \right| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

و بالتالي

1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = 2\pi i \sum_{Im z_k>0} Res(f, z_k)$$

أقطاب الدالة f في نصف المستوى الأعلى $\{z \mid Im z>0\}$

هي $z_1 = e^{i\pi/6}$; $z_2 = i$ و $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و هي بسيطة.

$z^6+1 = z^6-(-1)$

- $$Res(f, e^{i\pi/6}) = \lim_{z\to z_1} (z-z_1)\frac{1}{1+z^6} = \frac{1}{\lim_{z\to z_1} \frac{z^6+1}{z-z_1}}$$

$$Res(f, e^{i\pi/6}) = \frac{1}{6z_1^5} = \frac{1}{6} e^{-i5\pi/6}$$

1,5

- $$Res(f, i) = \lim_{z\to z_2} (z-z_2) f(z) = \frac{1}{6i^5} = \frac{1}{6}(-i)$$
- $$Res(f, z_3) = \lim_{z\to z_3} (z-z_3) f(z) = \frac{1}{6z_3^5} = \frac{1}{6} e^{-i\frac{25\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{6} e^{-i\pi/6}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{2\pi i}{6}\left(e^{-i\frac{5\pi}{6}} - i + e^{-i\pi/6} \right)$$

$$= \frac{2\pi i}{6}\left[2i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - i \right]$$

0,5

$$= \frac{2\pi i}{6}\left[-i - i \right] = \frac{2\pi i(-2i)}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

يعني. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}$.

Scanned by CamScanner

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{(x^2+4)^2}\,dx \overset{?}{=} \frac{7\pi}{32} e^{-6} \qquad (ج)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\, Re\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i3x}}{(x^2+4)^2}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, Re\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{imx}\,dx\right)$$

1 حيث $m=3$, $Q(x)=(x^2+4)^2$, $P(x)=1$

- نرى أن التكامل المعتل متقارب لأن $\deg Q \geq \deg P+1$ و Q ليس له جذور حقيقية.

- ندرس الدالة $f(z) = \dfrac{e^{i3z}}{(z^2+4)^2}$ داخل/على المسار المغلق الموجه في الاتجاه الموجب $\Gamma_R=[-R,R]\cup\gamma_R$ حيث $R \gg 1$.

باستخدام نظرية الرواسب

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{Im\, z_k>0} Res(f, z_k)$$

بما أن $\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ (باستخدام مبرهنة جوردان)

فإن
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{(x^2+4)^2}\,dx = 2\pi i \sum_{Im\, z_k>0} Res\left(\frac{e^{i3z}}{(z^2+4)^2}; z_k\right)$$

1
$$= 2\pi i\, Res\left(\frac{e^{i3z}}{(z^2+4)^2}; 2i\right)$$

$\{2i\}$ هو قطب من الرتبة الثانية لـ f

$$Res\left(\frac{e^{i3z}}{(z^2+4)^2}; 2i\right) = \frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-2i)^2}\cdot \frac{e^{i3z}}{\cancel{(z-2i)^2}(z+2i)^2}\right]_{/z=2i}$$

$$= \frac{3i e^{i3z}(z+2i)^2 - 2e^{i3z}(z+2i)}{(z+2i)^4}\Bigg/_{z=2i}$$

1
$$= \frac{e^{i3z}}{(z+2i)^3}\left[3i(z+2i)-2\right]\Big/_{z=2i} = \frac{e^{-6}(-14)}{-4^3 i}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{2\pi \cancel{i}\, e^{-6}\times 14}{4^3\, \cancel{i}} = \frac{7\pi e^{-6}}{16} \Rightarrow \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{7\pi e^{-6}}{32}}$$