

د/برهان

الإختبار النهائي لمقرر 111 رياض	كلية العلوم - قسم الرياضيات	جامعة الملك سعود King Saud University
الفصل الأول 1438 / 1439 هـ الزمن: 3 ساعات	الإسم / .....	الرقم الجامعي / .....
الدرجة: 40	أستاذ المقرر / .....	

2. ممنوع استخدام الآلة الحاسبة

1. عدد الورقات 6

السؤال 8	السؤال 7	السؤال 6	السؤال 5	السؤال 4	السؤال 3	السؤال 2	السؤال 1
6 درجات	3 درجات	درجتان	3 درجات	3 درجات	6 درجات	14 درجة	3 درجات

السؤال الأول: أوجد قيمة  $c$  التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة  $f(x) = 3\sqrt{x-1}$  على الفترة  $[1, 5]$ . (3 درجات)

$$\int_1^5 3\sqrt{x-1} dx = (5-1) 3\sqrt{c-1}$$

$$3 \int_1^5 (x-1)^{1/2} dx = 12\sqrt{c-1}$$

$$3 \times \frac{2}{3} [(x-1)^{3/2}]_1^5 = 12\sqrt{c-1}$$

$$16 = 2 \times 2^3 = 12\sqrt{c-1}$$

$$\sqrt{c-1} = \frac{4}{3} \Rightarrow c-1 = \frac{16}{9} \Rightarrow c = \frac{25}{9} \in (1, 5)$$

السؤال الثاني: احسب التكاملات التالية:

(درجتان)

$$\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} du = \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}} dx$$

$$u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x} dx$$

$$\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} dx = -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\sin^{-1}(u) + \text{const}$$
$$= -\sin^{-1}(e^{-x}) + \text{const}$$

(درجتان)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad (2)$$

فإن  $x = u^2$  و  $u = \sqrt{x}$  نضع

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du \quad \text{و بالتالي} \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2 \int \frac{du}{1-u^2} = 2 \tanh^{-1}(u) + C$$

$$= 2 \tanh^{-1}(\sqrt{x}) + C$$

$$= \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) + C$$

(درجتان)

$$\int 7^{3x-1} dx \quad (3)$$

فإن  $u = 3x-1$  نضع  $du = 3 dx$

$$\int 7^{3x-1} dx = \frac{1}{3} \int 7^u du = \frac{1}{3 \ln 7} 7^u + C$$

$$= \frac{1}{3 \ln 7} 7^{3x-1} + C$$

(درجتان)

$$\int x \sec^{-1} x dx \quad (4)$$

نستخدم طريقة التكامل بالجزء

$$\begin{aligned} u(x) &= \sec^{-1} x & u'(x) &= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \\ v'(x) &= x & \Rightarrow v(x) &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\int x \sec^{-1} x dx = \frac{x^2}{2} \sec^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \sec^{-1} x - \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} + C$$

(3 درجات)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}} \quad (5)$$

نستخدم طريقة إكمال المربع  $x^2+4x+8 = (x+2)^2+4$



$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2+(x+2)^2}}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &= \sinh^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right) + \text{ct} \\ &= \ln\left(\frac{x+2 + \sqrt{x^2+4x+8}}{2}\right) + \text{ct} \end{aligned}$$

(3 درجات)

$$\int \frac{4x^2-13x+6}{(x+2)(x-2)^2} dx \quad (6)$$

$$\textcircled{0.5} \int \frac{4x^2-13x+6}{(x+2)(x-2)^2} dx = \int \left[ \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \right] dx$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= A \ln|x+2| + B \ln|x-2| - \frac{C}{x-2} + \text{ct} \\ &= 3 \ln|x+2| + \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + \text{ct} \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$   $\int \frac{4x^2-13x+6}{(x+2)(x-2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$  حل التوابت \*

$$\boxed{A} = \lim_{x \rightarrow -2} (x+2) g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2-13x+6}{(x-2)^2} = \frac{48}{16} = \boxed{3}$$

$$\textcircled{1.5} \boxed{C} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2-13x+6}{x+2} = \frac{-4}{4} = \boxed{-1}$$

$$g(0) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{A}{2} - \frac{B}{2} + \frac{C}{4} = \frac{3}{2} - \frac{B}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{B=1}$$

(3 درجات)

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$

$x \neq 0$ ,  $f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$  نضع

$$\ln|f(x)| = (3x) \ln\left|1 + \frac{2}{x}\right|$$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln|f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

$$\textcircled{1} u = \frac{1}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow = \lim_{u \rightarrow 0^+} 3 \frac{\ln(1+2u)}{u} = 3 \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{2}{1+2u} = 6$$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x} = e^6 \text{ و بالتالي}$$



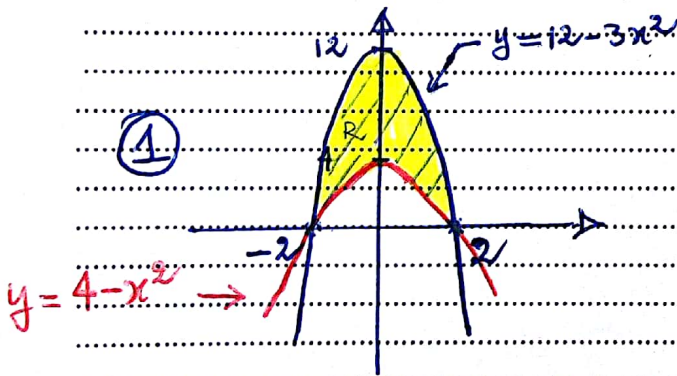
(ب) بين فيما إذا كان التكامل المعتل  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$  متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب). (3 درجات)

0,5 
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \int_2^t \frac{dx}{x(\ln x)^2} \right)$$

1,5 
$$\int_2^t \frac{dx}{x(\ln x)^2} \underset{u = \ln x}{=} \int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{du}{u^2} = \left[ -\frac{1}{u} \right]_{\ln 2}^{\ln t}$$

1 
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2}$$
 ; بما أن  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$  متقارب وتقترب  $\frac{1}{\ln 2}$

السؤال الرابع: ارسم المنطقة المحصورة بين المنحيتان  $y = 4 - x^2$  و  $y = 12 - 3x^2$  ووجد مساحتها. (3 درجات)

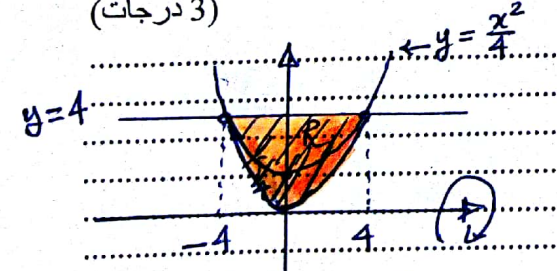


نقطة التقاطع:  
 $y = 4 - x^2 = 12 - 3x^2$   
 $3x^2 - x^2 = 12 - 4$   
 $2x^2 = 8$   
 $x = \pm 2$  (ب)  $x^2 = 4$   
 $y = 0$  (1)

المجموعة R هي:  
 $R = \{(x, y) / -2 \leq x \leq 2, 4 - x^2 \leq y \leq 12 - 3x^2\}$

0,5 
$$A(R) = \int_{-2}^2 [(12 - 3x^2) - (4 - x^2)] dx$$
  
 0,5 
$$= 2 \int_{-2}^2 (8 - 2x^2) dx = 2 \left[ 8x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{4 \times 16}{3} = \frac{64}{3}$$

السؤال الخامس: جد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحيتان  $x^2 = 4y$  و  $y = 4$  حول المحور (Ox). (3 درجات)



$x = \pm 4 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 4 \cdot 4$   
 $R = \{(x, y) / -4 \leq x \leq 4, \frac{x^2}{4} \leq y \leq 4\}$

2 
$$V(S) = \pi \int_{-4}^4 \left[ 4^2 - \left( \frac{x^2}{4} \right)^2 \right] dx$$



$$V(S) = \pi \int_{-4}^4 \left(16 - \frac{x^4}{16}\right) dx$$

①

$$= 2\pi \int_0^4 \left(16 - \frac{x^4}{16}\right) dx = 2\pi \left[16x - \frac{x^5}{5 \times 16}\right]_0^4$$

$$= 2\pi \left[64 - \frac{4^5}{5 \times 16}\right] = 128\pi \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{512}{5}\pi$$

(درجتان)

السؤال السادس: جد طول القوس  $y = \ln(\sin x)$  من  $x = \frac{\pi}{6}$  إلى  $x = \frac{\pi}{3}$ .

①

$$L(C) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} [\ln(\sin x)]\right)^2} dx$$

$$\frac{d}{dx} \ln(\sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x \quad ; \quad 1 + \cot^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$$

①.5

$$L(C) = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc x dx$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$L(C) = \left[ \ln \left| \csc x - \cot x \right| \right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln \left( \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \ln \left( 2 - \sqrt{3} \right)$$

$$= \left[ \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{2} \ln 3 \right]$$

السؤال السابع: جد مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران بيان المنحنى  $y = \frac{1}{3}(3\sqrt{x} - x^{3/2})$  على الفترة  $[1, 3]$  حول

(3 درجات)

المحور (Ox).

$$f(x) = \frac{1}{3} (3\sqrt{x} - x^{3/2})$$

①.5

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2} x^{1/2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right]$$

$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)^2 = 1 + \frac{1}{4x} + \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right)^2$$

①.5

$$S.A. = 2\pi \int_1^3 \frac{1}{3} (3\sqrt{x} - x^{3/2}) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

①

$$= 2\pi \int_1^3 \frac{1}{3} (3\sqrt{x} - x^{3/2}) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx$$

5Page

الاختبار النهائي 111 رياض للفصل الأول 1438-1439 هـ

①.5

$$= \frac{\pi}{3} \int_1^3 (3\sqrt{x} - x^{3/2}) \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx = \frac{\pi}{3} \int_1^3 [3 + 2x - x^2] dx$$

①.5

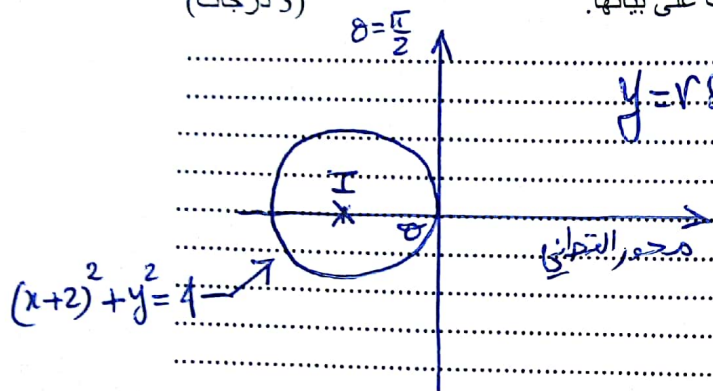
$$= \frac{\pi}{3} \left[ 3x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{\pi}{3} \left( 9 - \frac{11}{3} \right) = \frac{16\pi}{9}$$



السؤال الثامن :

(أ) حول المعادلة الديكارتية  $(x+2)^2 + y^2 = 4$  إلى القطبية ثم تعرف على بيانها.

(3 درجات)



نضع  $x = r \cos \theta$  و  $y = r \sin \theta$

$$(x+2)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = -4x$$

$$r^2 = -4r \cos \theta$$

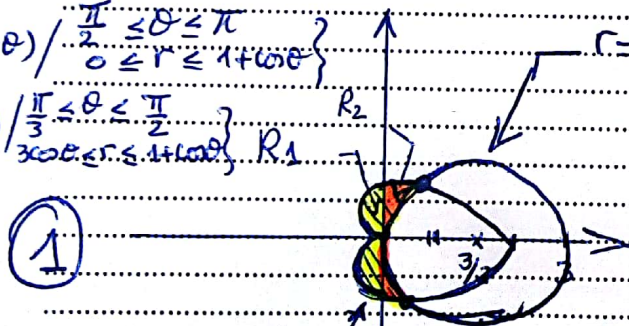
$$\boxed{r = -4 \cos \theta} \quad (2)$$

(1) دائرة مركزها  $I(-2, 0)$  ونصف قطرها  $R=2$

(ب) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى القلبي  $r = 1 + \cos \theta$  وخارج الدائرة  $r = 3 \cos \theta$  ثم جد مساحتها. (3 درجات)

$$R_1 = \left\{ (r, \theta) / \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 + \cos \theta \end{array} \right\}$$

$$R_2 = \left\{ (r, \theta) / \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 3 \cos \theta \leq r \leq 1 + \cos \theta \end{array} \right\}, R_1$$



دائرة مركزها  $I(3/2, 0)$  ونصف قطرها  $R=3/2$

منطقة التقاطع :

$$r = 1 + \cos \theta$$

منحنى قلبي

$$r = 1 + \cos \theta = 3 \cos \theta$$

$$2 \cos \theta = 1$$

$$\theta = \pm \pi/3 \quad \leftarrow \quad \cos \theta = 1/2$$

باستخدام التناظر فإن مساحة المنطقة المطلوبة

(1)

$$A(R) = \frac{1}{2} \left[ \int_{\pi/3}^{\pi/2} [(1 + \cos \theta)^2 - (3 \cos \theta)^2] d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta \right]$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi/2} [1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta - 9 \cos^2 \theta] d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} [1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta] d\theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$= \left[ \theta + 2 \sin \theta - 4 \left( \theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) \right]_{\pi/3}^{\pi/2} + \left[ \theta + 2 \sin \theta + \frac{\cos 2\theta}{2} \right]_{\pi/2}^{\pi}$$