السؤال الأول:(8 درجات)

(أ) (i) بدون استخدام الجداول , اثبت ما يلي : $p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$. (درجتان)

(ii) استخدم (i) لإثبات ما يلي : $u \to (v \wedge w \wedge x) \equiv (u \to v) \wedge (u \to w) \wedge (u \to x)$. (درجتان)

(ب) إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية معرَفة استقرائيا كالآتي : $\begin{cases} a_0 = 2, \quad a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 5\,a_n - 6\,a_{n-1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$.

أثبت أن : $a_n = 2^n + 3^n$ لكل, $n \geq 0$ (عدد صحيح). (4 درجات)

السؤال الثاني:(9 درجات)

(أ) لتكن R العلاقة المعرفة على الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ كما يلي : $x \; R \; y \Leftrightarrow 4 \mid (x^2 - y^2)$.

(i) اثبت أن R علاقة تكافؤ. (3 درجات)

(ii) اثبت أن $[n] = [1]$ لكل عدد فردي n . (درجتان)

(ب) إذا كانت $S = \{(a,a);(a,b);(b,c);(c,b)\}$ علاقة على المجموعة $A = \{a,b,c\}$, فجد كلا من الإغلاق الإنعكاسي, الإغلاق التناظري و الإغلاق المتعدي. (4 درجات)

السؤال الثالث:(8 درجات)

(أ) لتكن f دالة بولية ممثلة بشكل كارنو أدناه:

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	1		
xy'	1	1	1	1
$x'y'$		1		
$x'y$		1		

(i) اكتب f على شكل CSP . (درجة)

(ii) اكتب f على شكل MSP . (درجتان)

(iii) اكتب f على شكل MPS . (درجتان)

(iv) صمم شبكة **عطف و فصل أصغرية مخرجها** $f(x,y,z,w)$. (درجة)

(v) صمم شبكة مخرجها $f(x,y,z,w)$ باستخدام **بوابات نفي العطف فقط**. (درجة)

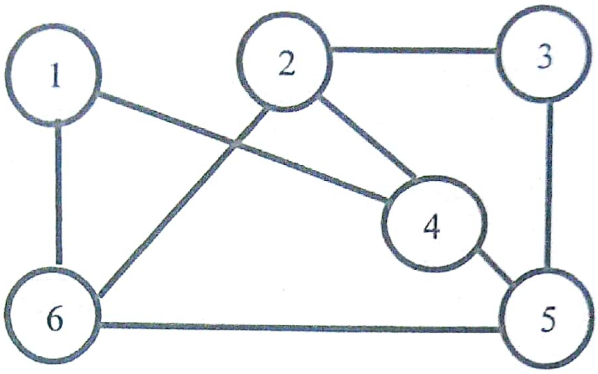
(vi) صمم شبكة مخرجها $f(x,y,z,w)$ باستخدام **بوابات نفي الفصل فقط**. (درجة)

السؤال الرابع:(6 درجات)

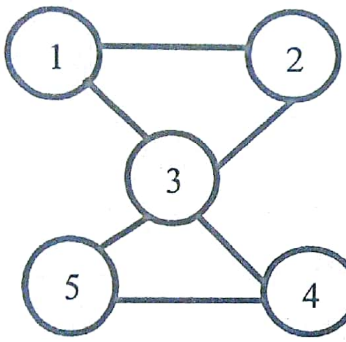
(أ) ليكن $G = (V,E)$ رسما بحيث $V = \{a,b,c\}$ و $\deg(b) = 2\deg(a)$ و $\deg(c) = 3\deg(a)$.

فجد $\deg(a)$ إذا علمت أن $|E| = 9$. (درجتان)

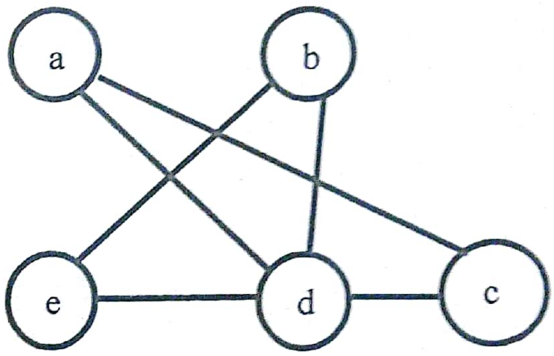
(ب) بيّن فيما إذا كان الرسم ادناه ثنائي التجزئة أم لا و إذا كان ثنائي التجزئة, فجد تمثيلا ثنائي التجزئة له. (درجتان)



(ج) بيّن فيما كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا و علّل إجابتك. (درجتان)



G



H

<u>السؤال الخامس:(9 درجات)</u>

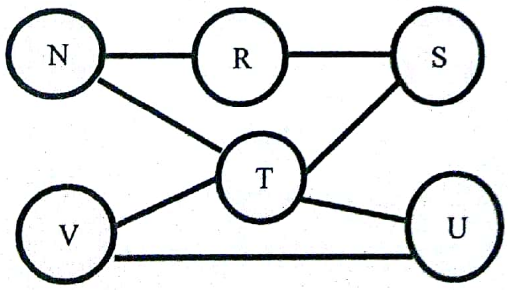
(أ) ليكن L الرسم الممثّل بمصفوفة الوقوع المقابلة :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) أوجد عدد أضلاع المتمم $\overline{L}$ لـ L . (درجتان)

(ii) بيّن فيما إذا كان L ذاتي التتميم . (درجة)

(ب) للرسم المقابل:



(i) أوجد شجرة تقصي عرضي جذرها R . (درجتان)

(ii) أوجد شجرة تقصي عمقي (طولي) جذرها R . (درجتان)

(ج) بيّن صحة أو خطأ كل من التقريرين التاليين, **مع التعليل:**

(i) كل رسم بسيط $G=(V,E)$ بحيث $|E|=|V|-1$ شجرة. (درجة)

(ii) لا يوجد جسور في أي رسم تام K_n ($n\geq 1$). (درجة)

د/ برهان

تصحيح الاختبار النهائي ١٠١ ريض
للفصل الأول ١٤٣٨/١٤٣٩ هـ

السؤال الأول (8 درجات)

(أ) (i)

(1) قاعدة الشرط $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$

(0,5) قاعدة التوزيع $\equiv \neg p \vee (q \wedge r)$

(0,5) قاعدة الشرط $\equiv p \to (q \wedge r)$

(ii)

(0,5) قاعدة التجميع $u \to (v \wedge w \wedge x) \equiv u \to ((v \wedge w) \wedge x)$

(0,5) $\overset{(i)}{\equiv} (u \to (v \wedge w)) \wedge (u \to x)$

(0,5) $\overset{(i)}{\equiv} ((u \to v) \wedge (u \to w)) \wedge (u \to x)$

(0,5) $\equiv (u \to v) \wedge (u \to w) \wedge (u \to x)$

(ب) نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي:

نضع $P(n) : a_n = 2^n + 3^n$

• خطوة الأساسية:

$n=0$	$n=1$
$2 = a_0 \overset{?}{=} 2^0 + 3^0 = 1+1$	(0,5) $5 = a_1 \overset{?}{=} 2^1 + 3^1 = 5$
ح وبالتالي $P(0)$ صائب	(0,5) ح وبالتالي $P(1)$ صائب

• خطوة الاستقراء: لنأخذ $k \geq 2$. نفترض أن $P(2)$, $P(3)$, ..., $P(k)$ جميعها صائبة ولنثبت صحة التقرير $P(k+1)$:

$$a_{k+1} \overset{?}{=} 2^{k+1} + 3^{k+1}$$

(0,5) نعلم أن $a_{k+1} = 5a_k - 6a_{k-1}$

كذلك $P(k)$ صائب يعني لدينا $a_k = 2^k + 3^k$

(0,5) أيضا $P(k-1)$ صائب يعني لدينا $a_{k-1} = 2^{k-1} + 3^{k-1}$

وبالتالي: $a_{k+1} = 5(2^k + 3^k) - 6(2^{k-1} + 3^{k-1})$

$= 5 \cdot 2^k + 5 \cdot 3^k - 6 \cdot 2^{k-1} - 6 \cdot 3^{k-1}$

(2) $= 5 \cdot 2^k + 5 \cdot 3^k - 3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k$

$= (5-3) \cdot 2^k + (5-2) \cdot 3^k = 2^{k+1} + 3^{k+1}$

Scanned by CamScanner

السؤال الثاني (9 درجات)

(1) أ) (i) R انعكاسية على $\mathbb{Z}$ لأن عندما نأخذ $x\in\mathbb{Z}$. نعلم أن $4|0$ $(0=4\times 0)$ و بالتالي $4|(x^2-x^2)$ يعني xRx.

(1) • R تناظرية على $\mathbb{Z}$ لأن عندما نأخذ $x,y\in\mathbb{Z}$ و نفترض أن xRy فإن $4|(x^2-y^2)$ و بالتالي $4|(y^2-x^2)$ هنا نوعي أن yRx.

• R متعدية على $\mathbb{Z}$ لأن عندما نأخذ $x,y,z\in\mathbb{Z}$ و نفترض أن xRy و yRz فإن لدينا $4|(x^2-y^2) \Leftrightarrow x^2-y^2=4k$ (1) حيث $k\in\mathbb{Z}$

كذلك $4|(y^2-z^2) \Leftrightarrow y^2-z^2=4k'$ (2) حيث $k'\in\mathbb{Z}$.

(1) من خلال (1) و(2) $x^2-y^2+y^2-z^2=4k+4k'$

يعني $x^2-z^2=4(k+k')=4L$ إذا $4|(x^2-z^2)$

يعني xRz.

- بما أن R انعكاسية، تناظرية و متعدية فإن R علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$.

(ii)

(0,5) $[1]=\{n\in\mathbb{Z} / nR1\}$

$[1]=\{n\in\mathbb{Z} / 4|n^2-1\}$

(0,5) $[1]=\{n\in\mathbb{Z} / n^2=4k+1$ حيث $k\in\mathbb{Z}_+\}$

(1) • نعلم أن $n^2\equiv 1 \bmod 4 \Leftrightarrow n$ فردي

(إذا كان n فردي فإن $n=2L+1$ حيث $L\in\mathbb{Z}$. عندئذ $n^2=(2L+1)^2$
$=4L^2+4L+1$
$=4(L^2+L)+1=4K+1$
و العكس صحيح، إذا كان n زوجي فإن n^2 هو زوجي").

و بالتالي $[1]=[n]$ لكل n عدد فردي

ب) الانغلاق الانعكاسي:

(1) $\rho(S)=S\cup S^{-1}=\{(a,a);(a,b);(b,c);(c,b);(b,b);(c,c)\}$

• الإغلاق التناظري:

(1) $$\sigma(S) = S \cup S^{-1}$$

$$\sigma(S) = \{(a,a);(a,b);(b,c);(c,b);(b,a)\}$$

• الإغلاق المتعدي:

(0,5) $$\tau(S) = S \cup S^2 \cup S^3$$

$$S = \{(a,a);(a,b);(b,c);(c,b)\}$$

(0,5) $$S^2 = \{(a,a);(a,b);(a,c);(b,b);(c,c)\}$$

$$S^3 = \{(a,a);(a,b);(a,c);(b,c);(c,b)\}$$

(1) $$\tau(S) = \{(a,a);(a,b);(b,c);(c,b);(a,c);(b,b);(c,c)\}$$

السؤال الثالث: (8 درجات)

(أ) (i)

(1) $$CSP(f) = xyzw + xyzw' + xy'zw + xy'zw' + xy'z'w' + xy'z'w + x'y'zw' + x'yzw'.$$

(ii)

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	1	0	0
xy'	1	1	1	1
$x'y'$	0	1	0	0
$x'y$	0	1	0	0

(2) $$\boxed{MSP(f) = xy' + zw' + xz}$$

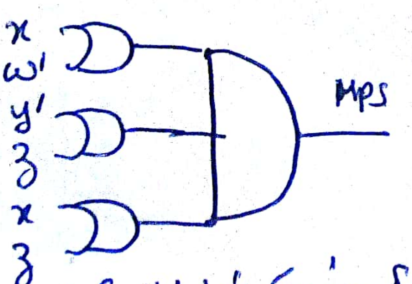
(iii)

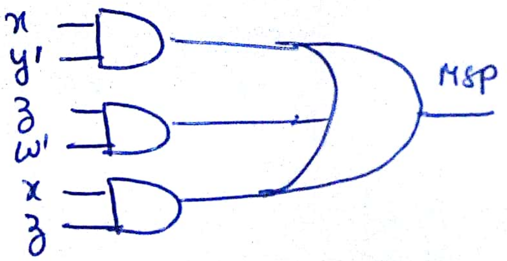
(0,5) $$MPS(f) = (MSP(f'))'$$

(0,5) $$MSP(f') = x'w + yz' + x'z'$$

وبالتالي $$\boxed{MPS(f) = (x+w')\cdot(y'+z)\cdot(x+z)}$$

(iv)





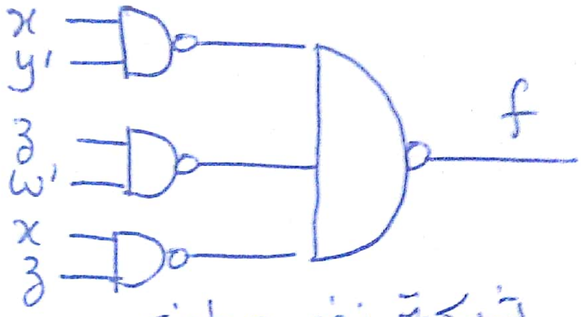
كلاهما شبكة عطف وفصل أصغرية لأنها تحتوي على نفس

Scanned by CamScanner

(v)

(0,5) $MSP(f) = \left[\left(xy' + zw' + xz\right)'\right]'$

$= \left[(xy')' \cdot (zw')' \cdot (xz)'\right]'$

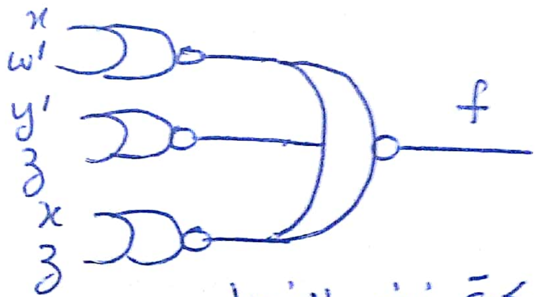
(0,5) 

شبكة نفي عطف

(vi)

(0,5) $MPS(f) = \left[\left((x+w') \cdot (y'+z) \cdot (x+z)\right)'\right]'$

$= \left[(x+w')' + (y'+z)' + (x+z)'\right]'$

(0,5) 

شبكة نفي الفصل

السؤال الرابع (6 درجات)

أ) نعلم أن

(0,5) $$\sum_{x_i \in V(G)} \deg(x_i) = 2|E|$$

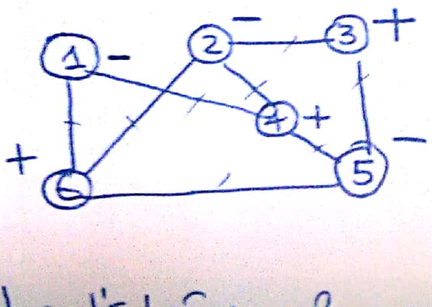
$$\deg(a) + \deg(b) + \deg(c) = 2|E|$$

$$\deg(a) + 2\deg(a) + 3\deg(a) = 2 \times 9$$

(1,5) $$6\deg(a) = 18$$

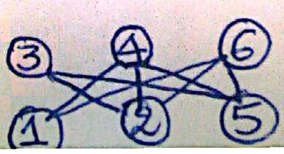
و بالتالي $\deg(a) = 3$

ب)



(1) الرسم هو ثنائي التجزئة لأنه لا يحتوي على دورات فردية.

(1) و هو متماثل للرسم التالي :



(ج) نعم الرسمان G و H متماثلين $G \simeq H$ (0,5)

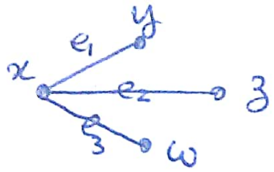
لأنه يوجد تطبيق تماثلي f :

(1,5)

$x \in V(H)$	a	b	c	d	e
$f(x) \in V(G)$	2	5	1	3	4

السؤال الخامس (9 درجات)

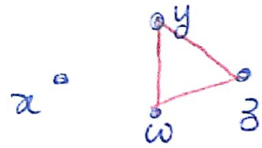
(أ) (i) الرسم L هو



(2) فإن عدد أضلاع متمم $\bar{L}$ هو 3 لأن $(L \cup \bar{L} = K_4)$

$$|E(L)| + |E(\bar{L})| = |E(K_4)| = \frac{4\times 3}{2} = 6$$

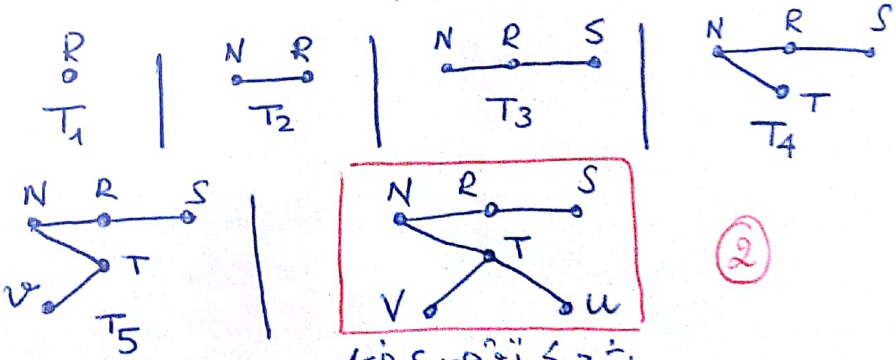
(ii) رسم $\bar{L}$ هو :



(1) $L \not\cong \bar{L}$ (لأن $\bar{L}$ ليس شجرة ، L شجرة)

وبالتالي L ليس ذاتي التتمم .

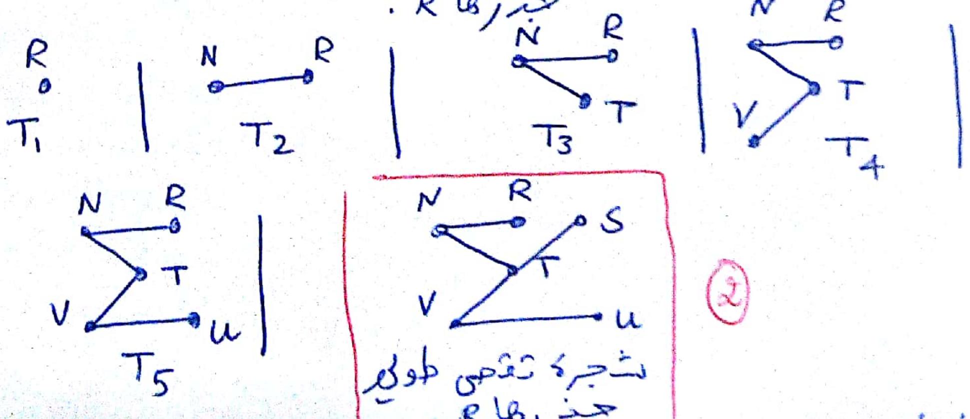
(ب) (i)



شجرة تقصي عرضيا جذرها R .

(2)

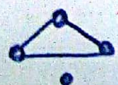
(ii)



شجرة تقصي طوليا جذرها R .

(2)

(ج) (i) لا ، خذ الرسم البسيط التالي



G ليس شجرة (1)

$|E| = |V| - 1$

(ii) لا ، خذ K_2

جسر (1)

Scanned by CamScanner