الاختبار الفصلي الأول 487 ريض الفصل 1 ، 1436-37

ملاحظة: رتب أجوبتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة.

1- أثبت أن $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

2- جد جميع حلول المعادلة $z^3 - 1 = i$.

3- عرِّف المقصود بالتالي مع إعطاء مثال عليه:

(أ) المجموعة المترابطة.

(ب) النقطة الحدودية.

(ت) النقطة التراكمية.

4- إذا كانت f متصلة في z_0 و $f(z_0) \neq 0$ ، فأثبت باستخدام التعريف أن $\dfrac{1}{f(z)}$ متصلة في z_0 .

5- جد شرطاً ضرورياً و كافياً لحدوث المساواة في $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ مع الاثبات.

١٤٣١ - ١٤٥٥ تصحيح الاختبار الشهري الأول للفصل الأول

487 ريض

① نعلم أن $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ولدينا $n \in \mathbb{N}$: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

وبالتالي $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

② $z^3 - 1 = i \Leftrightarrow z^3 = 1+i$; $1+i = \sqrt{2}\, e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

نضع $z = re^{i\theta}$ فإن $z^3 = r^3 e^{i3\theta}$

إذن

$$\begin{cases} r^3 = \sqrt{2} \\ 3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{6}} \\ \theta_k = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad 0 \le k \le 2$$

مجموعة الحلول للمعادلة: $z^3 - 1 = i$ هي

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ 2^{1/6} e^{i\pi/12} ;\ 2^{1/6} e^{i\frac{3\pi}{4}} ;\ 2^{1/6} e^{i\frac{17\pi}{12}} \right\}$$

③ (أ) - نقول أن المجموعة $X \subset \mathbb{C}$ مترابطة إذا كان من المستحيل ايجاد مجموعتين مفتوحتين ومنفصلتين U و V بحيث $X \subset U \cup V$ و $X \cap U \neq \phi$ و $V \cap X \neq \phi$.

مثال: $\mathbb{C}$ مترابط

(ب) لتكن $X \subset \mathbb{C}$ و $p \in X$. نقول أن النقطة p هي نقطة حدية إذا وفقط كل مجموعة مفتوحة تحتوي p تقطع X و تقطع $\mathbb{C} \setminus X$.

مثال: دائرة الوحدة هي مجموعة النقاط الحدودية للمنطقة $\{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

(ج) نقول أن النقطة p هي نقطة تراكم للمجموعة X إذا كان لكل $r > 0$، $D(p,r) \setminus \{p\} \cap X \neq \phi$.

مثال: الصفر هي نقطة تراكم للمجموعة $\{\frac{1}{n} ; n \geq 1\}$.

④ نأخذ $\varepsilon > 0$ ولنثبت أنه يوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ لدينا $\left| \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)} \right| < \varepsilon$

بما أن: f متصلة عند z_0 و $f(z_0) \neq 0$، فإنه يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث لكل $|z - z_0| < \delta_1$ لدينا $\left|\frac{1}{f(z)}\right| < \frac{2}{|f(z_0)|}$

(يعني $\frac{1}{|f|}$ محدودة في جوار z_0)

لذا لكل $z \in D(z_0, \delta_1) \cap D_f$، لدينا:

$$\left| \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)} \right| = \frac{1}{|f(z)|} \left| \frac{f(z_0) - f(z)}{f(z_0)} \right| \le \frac{2}{|f(z_0)|} \left| \frac{f(z_0) - f(z)}{f(z_0)} \right|$$

$$= \frac{2}{|f(z_0)|^2} |f(z) - f(z_0)|$$

كذلك f متصلة عند z_0 فإنه يوجد $\delta_2 > 0$ بحيث $|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon |f(z_0)|^2}{2}$.

الآن نأخذ $\delta(\varepsilon)=\min(\delta_1,\delta_2)$.

إذا كان $z\in D(z_0,\delta(\varepsilon))\cap D_{1/f}$ فإن لدينا $\left|\frac{1}{f(z)}-\frac{1}{f(z_0)}\right|<\varepsilon$

يعني الدالة $\frac{1}{f}$ متصلة عند $z=z_0$.

5

$$(*)\quad |z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$$

فإن

$$|z_1+z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$$

$$(z_1+z_2)(\bar z_1+\bar z_2) = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1 z_2|$$

$$z_1\bar z_1+\underbrace{z_1\bar z_2+z_2\bar z_1}+z_2\bar z_2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1 z_2|$$

$$z_1\bar z_2+z_2\bar z_1 = 2|z_1 z_2|$$

$$\cancel{2}\,Re(z_1\bar z_2) = \cancel{2}\,|z_1 z_2|$$

$$Re\left(\frac{z_1\bar z_2}{|z_1 z_2|}\right) = 1 \quad ; z_1 z_2\neq 0$$

$w=\frac{z_1\bar z_2}{|z_1 z_2|}$; $Re\, w = 1$

و $|w| = 1$

فإن $w=1$

وبالتالي

$$\frac{z_1\bar z_2}{|z_1 z_2|} = 1$$

$$arg(z_1\bar z_2) = 0$$

$$\boxed{arg\, z_1 = arg\, z_2}$$

⚠ إذا قيمة $z_1=0$ أو $z_2=0$ ، ما تتحقق.

الاختبار الفصلي الثاني	٤٨٧ ريض	الفصل ١ ، ١٤٣٦-٣٧

ملاحظة: رتب أجوبتك في الدفتر بحسب ترتيب الأسئلة.

١- أكتب معادلتي كوشي ريمان بالصيغة الديكارتية، ثم حولها إلى الصيغة القطبية مع بيان الخطوات.

٢- بين أن $h(x,y)=\cos(x)\sinh(y)$ هي دالة توافقية على كل المستوى الإحداثي ، ثم احسب المرافق التوافقي لها مع بيان الدالة التحليلية المتكونة من ذلك.

٣- أثبت أن $\tan^{-1}(z)=\frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z}$ ، ثم احسب جميع قيم $\tan^{-1}(2i)$.

٤- إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ متصلة ، فاثبت أن $|\int_a^b f(t)dt|\le\int_a^b |f(t)|dt$.

٥- احسب قيمة $\int_\alpha \frac{\cosh(z)dz}{(2z-\pi i)^2}$ كعدد مركب، حيث α هي الدائرة $|z|=2$ بالاتجاه الموجب و ذلك باستخدام الصيغة التكاملية للمشتقة.

تصحيح الاختبار الشهري الثاني للفصل الأول 1436-1437هـ
487 ريض

① $f = U + iV$ حيث $U = Re f$ و $V = Im f$; $x = \frac{z+\bar z}{2}$, $y = \frac{z-\bar z}{2i}$

معادلتي كوشي - ريمان
$$CR\text{-}Eq \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

هولومرفية $f \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] = 0$.

باستخدام الاحداثيات القطبية: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$; $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$, $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$

$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$ و $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

$$(2)\quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

بنفس الطريقة لدينا:

$$(3)\quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta$$

$$(4)\quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial v}{\partial y}(r\cos\theta)$$

بما أن $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ فإن (3) و (4) تصبح

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} = r\left[\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta\right] = r\frac{\partial u}{\partial r}$$

و بالتالي معادلتي كوشي - ريمان بالاحداثيات القطبية هي

$$CR\text{-}Eq \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

② $h(x,y) = \cos x \sinh y$ قابلة للاشتقاق عدة مرات C^2 على $\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = -\sin x \sinh y$; $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\cos x \sinh y$

$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \cos x \cosh y$; $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \cos x \sinh y$.

و بالتالي $\Delta h(x,y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) \equiv 0$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

يعني أن h هي دالة توافقية على $\mathbb{R}^2$.

إذن يوجد للدالة مرافق توافقي k بحيث $f = h + ik$

تكون تحليلية على $\mathbb{C}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial y} = -\cos x \cosh y & (1) \\ \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} = -\sin x \sinh y & (2) \end{cases}$$

بتكامل طرفي المعادلة (1) بالنسبة لـ x، نجد أن:

$$k(x,y) = -\int \cos x \cosh y \, dx = -\sin x \cosh y + \alpha(y)$$

باشتقاق طرفي هذه المعادلة بالنسبة لـ y:

$$\frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = -\sin x \sinh y + \alpha'(y)$$

بالمقارنة مع (2) نجد أن $\alpha'(y) = 0$ و بالتالي $\alpha(y) = cst$

إذن: $f_{cst}(x,y) = \cos x \sinh y + i(-\sin x \cosh y + cst)$

$$f_{cst}(x,y) = \cos x \sinh y - i \sin x \cosh y + icst \quad , cst \in \mathbb{R}$$

$$= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) - i\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + icst$$

$$= \frac{e^{y-ix} - e^{-y+ix}}{2} + icst = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2} + icst$$

$$f_{cst}(z) = -i(\sin z + cst)$$

(3)

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{+iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

$$\tan z = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

$$w = \tan^{-1} z \iff z = \tan w = -i \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}$$

$$z = -i \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}$$

$$iz(e^{2iw} + 1) = e^{2iw} - 1 \Leftarrow +iz = \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}$$

$$iz e^{2iw} - e^{2iw} = -1 - iz$$

$$e^{2iw}(iz - 1) = -1 - iz \Rightarrow e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{\cancel{+i}(-i + z)}{\cancel{+i}(-i - z)}$$

Scanned by CamScanner

$$e^{2iw} = \frac{i+z}{-i-z} \quad ; \quad z \neq i$$

$$\log\left(e^{2iw}\right) = \log\left(\frac{-i+z}{-i-z}\right) = \log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$$

$$2iw = -\log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$$

$$w = \boxed{\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)} \quad ; \quad z \neq \pm i$$

$$\tan^{-1}(2i) = \frac{i}{2} \log\left(\frac{3i}{-i}\right) = \frac{i}{2} \log(-3)$$

$$\tan^{-1}(2i) = \frac{i}{2}\left[\ln|-3| + i \arg(-3)\right]$$

$$\tan^{-1}(2i) = \frac{i}{2}\left[\ln 3 + i(\pi + 2k\pi)\right] \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

(4)

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| e^{i\theta}$$

فإن

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right) e^{-i\theta}$$

$$= \int_a^b f(t)\, e^{-i\theta}\, dt$$

$$= \int_a^b \operatorname{Re}\left(f(t)\, e^{-i\theta}\right) dt \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

(5) نعلم أن إذا كانت f تحليلية على قرص D يحتوي z_0 لدينا

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{bD} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

لكل $n \geq 0$ عدد صحيح

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{\cosh z}{(2z - \pi i)^2}\, dz = \frac{1}{4} \oint_{|z|=2} \frac{\cosh z}{\left(z - \frac{\pi i}{2}\right)^2}\, dz$$

بما أن $z_0 = \frac{\pi i}{2}$ ، $|z_0| = \frac{\pi}{2} < 2$ فإن

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cosh z}{\left(z - \frac{\pi i}{2}\right)^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} (\cosh)'\left(\frac{\pi i}{2}\right)$$

$\sinh(iz) = i \sin$

و لذا!

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{\cosh z}{(2z - \pi i)^2}\, dz = 8\pi i \sinh\left(\frac{\pi i}{2}\right)$$