كليّة العلوم – قسم الرياضيات- الفصل الصيفي 1439-1440 هـ
مقرَر 481 ريض – التحليل الحقيقي 2
اختبار الفصلي الأول – مدَة الاختبار: ساعة ونصف

(1) استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل $I=\int_1^2\left[3x^2-2\right]dx$. (درجتان)

(2) جد النهايات التالية: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\right)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}2^{-2n}\left(\sum\limits_{k=0}^{2^n}k\cos\left(\frac{k\pi}{2^n}\right)\right)$.
(4 درجات)

(3) جد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ على الفترة $[0,1]$. (درجة و نصف)

(4) جد $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ إذا كانت $F(x)=x.\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1+t^2}\,dt$. (درجة ونصف)

(5) بيَن فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}\,dx$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب). (3 درجات)

(6) جد المجموع للمتسلسلات التالية: (6 درجات)

(أ) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{7^{n-2}}$

(ب) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]$

(ج) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$.

(7) اختبر المتسلسلات التالية من حيث التقارب و التباعد: (7 درجات)

(أ) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n+n^4}{5^n-3^n}$

(ب) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(3+(-1)^n\right)^{-n}$

(ج) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}x^{\ln n}$ حيث $x>0$.

د. إيمان

تصحيح الاختبار الشهري الأول 481 ريض

للفصل الصيفي ١٤٤٠/٣٩ هـ

(1) $f(x)=3x^2-2$ دالة متصلة على $[1,2]$ فهي قابلة للتكامل. لدينا

(0.5)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\right)$$

$$a=1;\ b=2\ ;\quad \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{n}=\frac{1}{n}$$

- $$f\left(1+\frac{k}{n}\right)=3\left(1+\frac{k}{n}\right)^2-2=3\left(1+2\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)-2$$
$$=1+\frac{6}{n}k+\frac{3}{n^2}k^2$$

(0.5)

- $$\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)=n+\frac{6}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+\frac{3}{n^2}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{6n(n+1)}{2n}+\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]=$$

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+3\left(\frac{n+1}{n}\right)+\frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2}\right]=5=\int_1^2(3x^2-2)\,dx$$
$$=\left[x^3-2x\right]_1^2=4+1=5$$

(2) نعلم أن: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$ إذا كانت f قابلة للتكامل على $[0,1]$.

وبالتالي

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)$$

(1)

$$=\int_0^1\ln(1+x)\,dx$$

نكامل بالتجزئة: $u'(x)=1;\ u(x)=x$; $v(x)=\ln(1+x);\ v'(x)=\frac{1}{1+x}$

$$=\left[x\ln(1+x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x+1-1}{1+x}\,dx$$
$$=\ln 2-\int_0^1\left[1-\frac{1}{1+x}\right]dx$$
$$=\ln 2-\left[x-\ln(1+x)\right]_0^1$$

(1)

$$=\ln 2-\left[(1-\ln 2)-0\right]=2\ln 2-1$$

- $$\lim_{n\to+\infty}2^{-2n}\left(\sum_{k=1}^{2^n}k\cos\left(\frac{k\pi}{2^n}\right)\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}k\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)$$

(1)

نضع $N=2^n$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right)$$

$u(x)=x$, $v'(x)=\cos(\pi x)$ $\Rightarrow$ $u'(x)=1$, $v(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi}$

$$=\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[x\sin(\pi x)\right]_0^1-\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin(\pi x)\,dx$$

(1)

$$=+\frac{1}{\pi^2}\left(\cos\pi x\right)_0^1=\frac{-2}{\pi^2}$$

③ f متصلة على $[0,1]$ (مشراص) فانه يوجد $c\in(0,1)$ التي تحقق

0,5

$$\int_0^1 f(x)\,dx = (1-0) f(c)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{1+c^2}$$

1

$$\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{1}{1+c^2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1+c^2}$$

$$1+c^2 = \frac{4}{\pi} \Leftrightarrow c^2 = \frac{4-\pi}{\pi} > 0$$

$$c = \pm\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$$ بما أن $c\in(0,1)$ فإن قيمة c هي $\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$.

④

$$F(x) = x.\int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1+t^2}\,dt$$

1

$$F'(x) = \int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1+t^2}\,dt + x\cdot\frac{d}{dx}\left(\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1+t^2}\,dt\right)$$

$$= \int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1+t^2}\,dt + x\left[\sqrt{1+\cos^2 x}\,(-\sin x) - \sqrt{1+\sin^2 x}\,\cos x\right]$$

$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}/2$

0,5

$$F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}\,\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{-\pi\sqrt{3}}{4}$$

⑤

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^t e^{-\sqrt{x}}\,dx\right)$$

1,5

$$\bullet\ \int_0^t e^{-\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^{\sqrt{t}} u\,e^{-u}\,du = -2\left[u\,e^{-u}\right]_0^{\sqrt{t}} + 2\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u}\,du$$

$u=\sqrt{x}$

$u^2 = x \Rightarrow dx = 2u\,du$ $\left\{\begin{array}{l} f(u)=u \\ g'(u)=e^{-u}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} f'(u)=1 \\ g(u) = -e^{-u}\end{array}$

$$\int_0^t e^{-\sqrt{x}}\,dx = -2\left(\sqrt{t}\,e^{-\sqrt{t}}\right) - 2\left[e^{-u}\right]_0^{\sqrt{t}} = -2\sqrt{t}\,e^{-\sqrt{t}} - 2e^{-\sqrt{t}} + 2$$

$$= -2(\sqrt{t}+1)\,e^{-\sqrt{t}} + 2$$

1,5

$$\lim_{t\to+\infty}\left[-2\,\frac{\sqrt{t}+1}{e^{\sqrt{t}}} + 2\right] = 2$$

وبالتالي التكامل المعتل $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$ متقارب ومجموعه يساوي 2.

⑥ (أ)

$$\bullet\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{7^{n-2}} = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{3^{N+2}}{7^N} = 9\sum_{N=0}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^N = 9\,\frac{1}{1-3/7}$$

2

$N = n-2$ متسلسلة هندسية حدها $-1 < r = \frac{3}{7} < 1$ متقاربة

$$= \frac{63}{4}$$

(ب)

$$\bullet\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]$$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\left[\ln n - \ln(n+1)\right] + \sum_{n=1}^{N}\left[\ln(n+2) - \ln(n+1)\right]$$

$$S_N = \left[(\underset{0}{\ln 1} - \cancel{\ln 2}) + (\cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 3}) + \cdots + (\cancel{\ln N} - \ln(N+1)) \right] + \left[(\cancel{\ln 3} - \ln 2) + (\cancel{\ln 4} - \cancel{\ln 3}) + \cdots + (\ln(N+2) - \cancel{\ln(N+1)}) \right]$$

$$= -\ln(N+1) + \ln(N+2) - \ln 2 = \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln 2$$

2

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \left[\ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln 2 \right] = -\ln 2$$

و بالتالي

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right] = -\ln 2$$

(8)

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}\right]$$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{4}} - \cancel{\tfrac{1}{7}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{7}} - \tfrac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3N+1} - \frac{1}{3N+4}\right)$$

2

$$S_N = 1 - \frac{1}{3N+4}$$

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = 1 \iff \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3}{(3n+1)(3n+4)}\right] = 1$$

7

(أ) متسلسلة موجبة ، نستخدم اختبار نهاية المقارنة

$$a_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n} = \frac{3^n}{5^n} \left[\frac{1 + n^4/3^n}{1 - (3/5)^n}\right]$$

نأخذ $b_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n > 0$. بحيث

2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{n^4}{3^n}}{1 - (3/5)^n} = 1$$

لأن $\left(\frac{3}{5}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ متسلسلة هندسية $-1 < r = \frac{3}{5} < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{3^n} = 0$$

وبما أن $\sum_n b_n = \sum_n \left(\frac{3}{5}\right)^n$ متسلسلة هندسية متقاربة

فإن $\sum_n \frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n}$ متقاربة .

(ب) $a_n = (3+(-1)^n)^{-n} > 0$ ، نستخدم اختبار المقارنة

2

لكل n $a_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} \leq \frac{1}{2^n} = b_n$

بما أن $\sum_n b_n = \sum_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ متقاربة (هندسية حيث $r=\frac{1}{2}$)

فإن $\sum_{n=0}^{\infty} \left(3+(-1)^n\right)^{-n}$ متقاربة.

(ج) $x>0$, $a_n = x^{\ln n} = e^{(\ln n)(\ln x)}$

$a_n = n^{\ln x}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{-\ln x}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$ تكون متقاربة إذا وفقط $p>1$

حيث $p=-\ln x$

وبالتالي $-\ln x > 1 \iff x < e^{-1}$

3

إذن: إذا كان $0<x<\frac{1}{e}$ فإن $\sum_{n=2}^{\infty} x^{\ln n}$ متقاربة.

أما إذا كان $x \geq \frac{1}{e}$ فإن $\sum_{n=2}^{\infty} x^{\ln n}$ متباعدة.
