جامعة الملك سعود King Saud University	كلية العلوم - قسم الرياضيات	اختبار الشهري الثاني 487 ريض الفصل الصيفي 1438-1439 هـ

السؤال الأول (10 درجات):

(أ) أوجد دالة تحليلية غير محدودة على قرص الوحدة المفتوح $D(O,1)=\{z\in\mathbb{C} \mid \ |z|<1\}$. (درجتان)

(ب) احسب قيمة التكاملات التالية :

$I=\oint_{|z|=1}\frac{z+1}{\bar{z}-2}dz$. (3 درجات)

$J=\oint_{|z|=1}\frac{e^{z}}{(4z-i\pi)^{5}}dz$. (درجتان)

$K=\oint_{|z|=3}\frac{z}{(2-z)(z-1)^{2}}dz$. (3 درجات)

السؤال الثاني (6 درجات):

(1) لتكن f دالة كلية بحيث لكل $z\in\mathbb{C}$, $|f(z)|\leq\sqrt{|z|}$. بيّن أن : $f(z)\equiv 0$ لكل $z\in\mathbb{C}$. (3 درجات)

(2) لتكن g دالة كلية و لنفترض أنه يوجد عدد حقيقي $M>0$ بحيث $\Im m(g)\leq M$. بيّن ان الدالة g ثابتة على $\mathbb{C}$. (ارشاد: ادرس الدالة : $\bar{e}^{ig}$) . (3 درجات)

السؤال الثالث (9 درجات):

(1) على ماذا ينصّ مبدأ القيمة العظمى للمقياس ؟ (درجتان)

(2) بيّن انه إذا كان $z=x+iy$ فإن $|\sin z|^{2}=\sin^{2}x+sinh^{2}y$. (3 درجات)

(3) استخدم (1) و (2) لايجاد القيمة العظمى لمقياس الدالة $f(z)=\sin z$ على المنطقة المستطيلة :

$R=\{z=(x+iy)\in\mathbb{C} \mid 0\leq x\leq\pi,\ 0\leq y\leq 1\}$. (4 درجات)

حل الاختبار الشهري الثاني ٢٨٧ ريض
للفصل الصيفي ١٤٣٨/١٤٣٩هـ

السؤال الأول : (١٠ درجات)

أ) خذ $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ وبالتالي تحليلية على قرص الوحدة غير محدودة $\lim\limits_{z\to 1} |f(z)| = +\infty$.

2

ب)
$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z+1}{\bar{z}-2}\, dz$$

1

بما أن $z \in \mathcal{C}(0,1)$ فإن $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z+1}{\frac{1}{z}-2}\, dz = \oint_{|z|=1} \frac{z(z+1)}{1-2z}\, dz$$

$f(z) = z(z+1)$ تحليلية
$z_0 = 1/2$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$
حيث $z_0 \in \mathring{\Gamma}$

$$I = -\frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{z(z+1)}{z-1/2}\, dz = -\frac{1}{\cancel{2}}\, \cancel{2}\pi i \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}+1\right)$$
$$I = -\frac{3\pi i}{4}$$

2

$$J = \oint_{|z|=1} \frac{e^{z}}{(4z-i\pi)^5}\, dz$$

$\left|i\frac{\pi}{4}\right| = \frac{\pi}{4} < 1$

$$= \frac{1}{4^5}\oint_{|z|=1} \frac{e^{z}}{\left(z-i\frac{\pi}{4}\right)^5}\, dz$$

1

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

$$= \frac{1}{4^5}\,\frac{2\pi i}{4!}\, f^{(4)}\left(i\frac{\pi}{4}\right).$$

$f(z) = e^{z}$ تحليلية
$z_0 = i\frac{\pi}{4}$
$f^{(n)}(z) = e^{z}$ لكل $n \geq 1$

$$= \frac{1}{4^5}\,\frac{\pi i}{12}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4^5\times 12}\,\pi i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$= \frac{\pi i}{4^5\times 12}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

1

$$K = \oint_{|z|=3} \frac{z}{(2-z)(z-1)^2}\, dz$$

لكل $z \in \mathbb{C} \setminus \{1,2\}$ $\quad f(z) = \frac{z}{(2-z)(z-1)^2} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$

$$\boxed{A} = \lim_{z\to 2} (z-2) f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{-z}{(z-1)^2} = \boxed{-2}$$

$$\boxed{C} = \lim_{z\to 1} (z-1)^2 f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z}{2-z} = \boxed{1}$$

2

$$f(z) = \frac{z}{(2-z)(z-1)^2} = \frac{-2}{z-2} + \frac{B}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$f(0) = 0 = 1 - B + 1 \Rightarrow \boxed{B = 2}$$

$$K = \oint_{|z|=3} \frac{z}{(2-z)(z-1)^2}\, dz = -2 \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z-2} + 2 \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z-1} + \oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2}$$

$$\oint_\Gamma (z-z_0)^m\, dz = \begin{cases} 2\pi i \,; & m=-1 \\ 0 \,; & m\neq -1 \end{cases}$$

حيث $z_0 \in \mathring{\Gamma}$

$$K = -2(2\pi i) + 2(2\pi i) + 0 = 0 \quad 1$$

السؤال الثاني (6 درجات)

1 بما أن f تحليلي عند الصفر فإن :

لكل $z \in D(0,r)$ $\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$

حيث $\quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

بما أن $|f(z)| \le \sqrt{|z|}$ فإن

$$|f(re^{i\theta})| \le \sqrt{r}$$

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{|r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}|} |ire^{i\theta}|\, d\theta$$

1,5

$$|a_n| \le \frac{1}{r^{n-1/2}} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

لكل $n \ge 1$

وبالتالي $a_1 = a_2 = \dots = 0$

إذن $f(z) = a_0$ لكل $z \in D(0,r)$

وبما أن $|f(0)| \le |0| = 0$ فإن $f(0) = 0$

فنستنتج أن لكل $z \in \mathbb{C}$ ، $f(z) \equiv 0$.

1,5

(2)

$$g = Re(g) + i\, Im(g)$$

$$-ig = -i\, Re(g) + Im(g)$$

$$e^{-ig} = e^{+Im(g)}\, e^{-i\,Re(g)}$$

(1,5)

$$|e^{-ig}| = e^{+Im(g)}$$

لذا $z \in \mathbb{C}$, $|e^{-ig}| \leq e^{M}$ لأن $Im(g) \leq M$

وبالتالي e^{-ig} هي دالة محدودة على $\mathbb{C}$ و كلية

(باعتبار أن g هي كلية) باستخدام نظرية ليوفيل

(Liouville Thm) فان e^{-ig} هي دالة ثابتة على $\mathbb{C}$.

باستخدام دالة اللوغاريتمي نستنتج أن g هي دالة ثابتة على $\mathbb{C}$.

(1,5)

السؤال الثالث (9 درجات)

(1) إذا كانت f دالة تحليلية داخل وعلى مسار Γ بسيط ومغلق فان القيمة العظمى للمقياس $|f|$ لا تكون إلا على Γ إذا كانت f ليست دالة ثابتة.

(2)

$$\sup_{\mathring{\Gamma}} |f| = \sup_{\Gamma} |f|$$

(2) ليكن $z = x+iy$ فان $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ و $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

(0,5)

$$|\sin z|^2 = (\sin z)(\overline{\sin z})$$

$$= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left(\overline{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\left(e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{i(z-\bar{z})} - e^{i(z+\bar{z})} - e^{-i(z+\bar{z})} + e^{i(\bar{z}-z)}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{-2y} - e^{2ix} - e^{-2ix} + e^{2y}\right]$$

(1)

$$= \frac{1}{4}\left[e^{2y} + e^{-2y} - \left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right)\right]$$

$$|\sin z|^2 = \frac{1}{4}\left[2\cosh 2y - 2\cos(2x)\right]$$

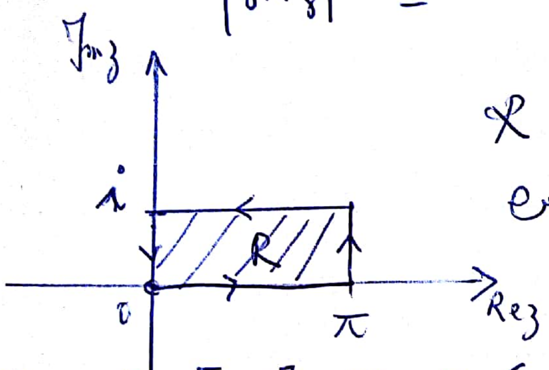
$$|\sin z|^2 = \frac{1}{2}\left[\cosh(2y) - \cos(2x)\right]$$

$$|\sin z|^2 = \frac{1}{2}\left[\cosh^2 y + \sinh^2 y - \cos(2x)\right]$$

1,5 $$|\sin z|^2 = \frac{1}{2}\left[1 + 2\sinh^2 y - \cos 2x\right]$$

$$|\sin z|^2 = \sinh^2 y + \frac{1-\cos 2x}{2} = \sinh^2 y + \sin^2 x$$

1



3 $f(z) = \sin z$ تحليلي على المنطقة R

باستخدام مبدأ القيمة العظمى للمقياس

$$\sup_{R} |f(z)| = \sup_{bR} |f(z)|$$

حافة R مشكلة من 4 قطع مستقيمة $[0,\pi]$, $[0,i]$, $[\pi,\pi+i]$ و $[i,\pi+i]$

. القيمة العظمى للدالة $\sin x$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$

2

. " " " $\sinh y$ عندما $y = 1$ $\left(y \to \sinh y \nearrow \right)$ $0 \le y \le 1$

وبالتالي $|\sin z|^2 = \sinh^2 y + \sin^2 x$ لها قيمة عظمى عند النقطة $(\frac{\pi}{2}, 1)$ وقيمتها

$$\frac{e^2+e^{-2}}{2} = \cosh 2 = \left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right)^2 + 1$$

1