جامعة الملك سعود King Saud University	الاختبار الفصلي الثاني ٢٠٩ ريض للفصل الأول ١٤٤٠/١٤٤١ هـ	يوم الخميس ١٤٤١/٣/١٧ هـ الزمن : ساعة ونصف.

السؤال الأول (١٥) :

(١) أ) جد متسلسلة القوى للدالة $f(x)=\dfrac{x}{2-x^2}$ و ماهي فترة تقاربها ؟

ب) استنتج من أ) متسلسلة القوى للدالة $g(x)=\ln\left(2-x^2\right)$ ثم بيّن ان $\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\,2^n}$.

(٢) إذا علمت أن: $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ و $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

(أ) أوجد القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

(ب) جد قيمة $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

(٣) جد متسلسلة ماكلورين للدالة $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$.

السؤال الثاني (١٠) :

(١) لتكن $f(x)=x(1-x)$ معرفة على الفترة $(0,1)$ بحيث $f(x+2)=f(x)$.

(أ) جد مفكوك الجيب فورية للدالة f على الفترة $(0,1)$ ثم استنتج قيمة $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$.

(ب) جد مفكوك الجيب التمام فورية للدالة f على الفترة $(0,1)$ ثم استنتج قيمة $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

(٢) أوجد تكامل فوريَة للدالة $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 0, & x\ge 1\end{cases}$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج قيمة التكامل المعتل $\int_0^{\infty}\dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\,d\alpha$.

(1)

تصحيح الاختبار الشهري الثاني

209 ريض

السؤال الأول (15 درجة)

(1) أ) نعلم أن $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$ لكل $-1<u<1$

(1) $$f(x) = \frac{x}{2-x^2} = \frac{x}{2}\,\frac{1}{1-(\frac{x^2}{2})}$$

نضع $U = \frac{x^2}{2}$ فإن

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n}$$ لكل $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

وبالتالي

$$f(x) = \frac{x}{2-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^{2n+1}$$ لكل $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

(1) (1)

ب)

$$g(x) = \ln(2-x^2)$$

$$g'(x) = \frac{-2x}{2-x^2} = -2f(x)$$

(1) $$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^n} x^{2n+1} \quad , \quad -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$$ لكل

باستخدام مبرهنة التكامل للمتسلسلات القوى

(1) $$g(x) = \ln(2-x^2) = \ln 2 + \int_0^x \frac{-2t}{2-t^2}\,dt$$

$$\ln(2-x^2) = \ln 2 + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^n} t^{2n+1}\right) dt$$ لكل $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

$$= \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^n}\left(\int_0^x t^{2n+1}dt\right)$$

$$\ln(2-x^2) = \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n\,2(n+1)} x^{2n+2} \quad (*)$$ لكل $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

(1)

نضع $x=1 \in (-\sqrt{2},\sqrt{2})$ في $(*)$، نجد

$$0 = \ln 1 = \ln(2-1) = \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(n+1)}(n+1)}$$

(1) إذن $$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(n+1)}(n+1)} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N2^N}$$

2)

② (أ) نعلم أن $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots$ لكل $u \in \mathbb{R}$

نأخذ $u = -x^2$ و بالتالي $e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!}$ لكل $x \in \mathbb{R}$

1

فإن $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 \left[1 - x^2 + \frac{x^4}{2!}\right] dx$

$$\approx \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

1

$$\approx \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right]$$

(ب) بما أن

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots$$

1

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

عندما $x \neq 0$

$$\frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \approx \frac{\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)}{x^2}$$

$$\approx \frac{\frac{3}{2}x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right)x^4}{x^2}$$

1

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$$

③ ○ طريقة الأولى:

نعلم أن $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ لكل $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{x}{4}\right)\right)^{-1/2}$$

بما أن $(1+u)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-n+1)}{n!} u^n$ لكل $-1 < u < 1$

نضع $u = -\frac{x}{4}$ فإن

$\left(1 - \frac{x}{4}\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)\cdots(-1/2-n+1)}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^n$ لكل $-4 < x < 4$

و بالتالي

$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)\cdot(\frac{1}{2}-n+1)}{2\cdot 4^n}(-1)^n x^n$ لكل $-4 < x < 4$

3)

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}x + \frac{3}{8\times 16}x^2 - \dots \quad , -4<x<4 \text{ لكل}$$

طريقة ثانية: نستخدم مبرهنة تايلور بما أن h متصلة وقابلة للاشتقاق عدة مرات فإن

1

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n$$ لكل x في جوار الصفر

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2!}x^2 + \frac{h^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots$$

- $h(0) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

2

- $h'(x) = \frac{1}{2}(4-x)^{-3/2} \Rightarrow h'(0) = \frac{1}{2}(2^2)^{-3/2} = \frac{1}{16}$
- $h''(x) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(4-x)^{-5/2} \Rightarrow h''(0) = \frac{3}{4}(2^2)^{-5/2} = \frac{3}{128}$
- $h^{(3)}(x) = \left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)(4-x)^{-7/2} \Rightarrow h^{(3)}(0) = \frac{15}{8}\cdot 2^{-7} = \frac{15}{1024}$

1

لكل x في جوار الصفر
$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}x + \frac{3}{256}x^2 + \frac{15}{6\times 1024}x^3 + \dots$$

السؤال الثاني (10 درجات)

(1) أ) بما أن f متصلة على $(0,1)$ فهي تحظى بمفكوك الجيب فورية

$$x(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) \quad , x\in(0,1) \text{ لكل}$$

1

حيث
$$b_n = 2\int_0^1 x(1-x)\sin(n\pi x)\,dx$$ لكل $n\geq 1$ عدد صحيح

$u(x) = x(1-x) = x - x^2 \Rightarrow u'(x) = 1-2x$

$v'(x) = \sin(n\pi x) \qquad v(x) = -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}$

$$b_n = 2\left[-\frac{1}{n\pi}\left[x(1-x)\cos(n\pi x)\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 (1-2x)\cos(n\pi x)\,dx\right]$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1-2x)\cos(n\pi x)\,dx$$

$u_1(x) = 1-2x \qquad u_1'(x) = -2$

$v_1'(x) = \cos(n\pi x) \rightarrow v_1(x) = \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}$

4)

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n\pi}\left[(1-2x)\sin(n\pi x)\right]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx\right]$$

$$b_n = \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1$$

$$b_n = \frac{-4}{n^3\pi^3}\left[\cos(n\pi) - 1\right]$$

2

$$b_n = \frac{4}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right]$$

لكل $0<x<1$

$$x(1-x) = \frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin(n\pi x)$$

$$(*) \quad x(1-x) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin((2k+1)\pi x)$$

الآن نأخذ قيمة $x=\frac{1}{2}$ في $(*)$

1

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{\pi^3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{8}{\pi^3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\right)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\right) = \frac{\pi^3}{32}$$

و بالتالي

ب) كذلك f تحصل على بمفكوك الجيب التمام فورية على $(0,1)$

$$x(1-x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\pi x)$$

حيث

$$a_0 = 2\int_0^1 x(1-x)\,dx$$

5)

$$a_0 = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

1

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{3}}$$

و لكل $n \geq 1$,

$$a_n = 2\int_0^1 x(1-x)\cos(n\pi x)\,dx$$

$$u(x) = x(1-x) = x - x^2 \qquad u'(x) = 1-2x$$
$$v'(x) = \cos(n\pi x) \quad \Rightarrow \quad v(x) = \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}$$

$$a_n = 2\left[\frac{1}{n\pi}\underbrace{\left[x(1-x)\sin(n\pi x)\right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 (1-2x)\sin(n\pi x)\,dx\right]$$

$$a_n = \frac{-2}{n\pi}\int_0^1 (1-2x)\sin(n\pi x)\,dx$$

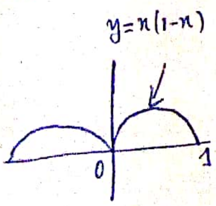
$$u_1(x) = 1-2x \qquad u_1'(x) = -2$$
$$v_1'(x) = \sin(n\pi x) \quad \Rightarrow \quad v_1(x) = -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}$$

$$a_n = -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{1}{n\pi}\left[(1-2x)\cos(n\pi x)\right]_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx\right]$$

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi^2}\left[-\cos(n\pi) - 1\right] = \frac{-2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n + 1\right]$$

2

لكل $0 < x < 1$



$$x(1-x) = \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x) \qquad (**)$$

طريقة 1 :

بما أن f متصلة عند $x=0$, فإن

$$0 = \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}\right)$$

$$+\frac{1}{6} = +\frac{2}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{n^2}\right)$$

1

$$\frac{\pi^2}{12} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

6)

. طريقة ثانية نأخذ $x=\frac{1}{2}$ في $(\alpha\text{-}x)$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}\cos\left((2k)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{6} - \frac{\cancel{4}}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\cancel{4}k^2}\cos(k\pi)$$

$$\frac{1}{12} = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\right)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\right) = \frac{\pi^2}{12}$$ و بالتالي

2) f معرفة على R متصلة على $/R\setminus\{1\}$ فهي

3 حظى بتكامل فورييه لكل $x\neq 1$

1)

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[A(\alpha)\cos(\alpha x)+B(\alpha)\sin(\alpha x)\right]d\alpha$$

حيث

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx$$

$$A(\alpha) = \int_0^1 x\cos(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\left[x\sin(\alpha x)\right]_0^1 - \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \sin(\alpha x)$$

$u(x)=x \quad\Rightarrow\quad u'(x)=1$

$v'(x)=\cos(\alpha x) \quad\Rightarrow\quad v(x)=\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}$

$$.\ A(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\left[\cos(\alpha x)\right]_0^1 = \frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\left[\cos\alpha - 1\right]$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)\,dx$$

$$B(\alpha) = \int_0^1 x\sin(\alpha x)\,dx$$

$u(x)=x \quad\Rightarrow\quad u'(x)=1$

$v'(x)=\sin(\alpha x) \quad\Rightarrow\quad v(x)=-\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}$

$$B(\alpha) = -\frac{1}{\alpha}\left[x\cos(\alpha x)\right]_0^1 + \frac{1}{\alpha}\int_0^1\cos(\alpha x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left[\cos\alpha\right] + \frac{1}{\alpha}\frac{\left[\sin(\alpha x)\right]_0^1}{\alpha}$$

7)

$$\boxed{B(\alpha) = -\frac{\cos\alpha}{\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\alpha^2}}$$

1

لكن $0 < x < 1$,

$$(\star) \quad x = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^2}\right)\cos(\alpha x) + \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha^2} - \frac{\cos\alpha}{\alpha}\right)\sin(\alpha x)\right]d\alpha$$

بما أن f متصلة عند $x=0$ فان لدينا بعد تعويض قيمة x بـ 0 في $(\star)$

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^2}\right)d\alpha$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha + \int_0^\infty \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^2}\,d\alpha = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\,d\alpha = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

<u>طريقة ثانية:</u>

+2

$$\frac{f(1^+) + f(1^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\left[\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^2}\right]\cos\alpha + \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha^2} - \frac{\cos\alpha}{\alpha}\right)\sin\alpha\right]d\alpha$$

$$\frac{0+1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\cancel{\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}} + \frac{\cos^2\alpha - \cos\alpha}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} - \cancel{\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}}\right]d\alpha$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \cos\alpha}{\alpha^2}\,d\alpha$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\,d\alpha$$