د/برهان

جامعة الملك سعود King Saud University — كلية علوم الحاسب والمعلومات فرع المزاحمية	الاختبار الشهري الأول للمقرر 151 ريض للفصل الثاني 1438-1439 هـ
الإسم : .... الرقم الجامعي :	الزمن : ساعة و نصف. الدرجة :

السؤال الأول (6 درجات):

(1) باستخدام جداول الصواب اثبت أن : $(p \to q) \to \neg p \equiv p \to \neg q$. (3 درجات)

الحل :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \to q)$	$(p \to q) \to \neg p$	$p \to \neg q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T
		0,5	0,5	0,5	1	0,5

(2) بدون استخدام الجداول, اثبت أن : $\neg p \to (q \to r) \equiv q \to (p \vee r)$. (3 درجات)

1 $\neg p \to (q \to r) \equiv \neg(\neg p) \vee (q \to r)$

$\equiv p \vee (\neg q \vee r)$

1 $\equiv \neg q \vee (p \vee r)$

1 $\equiv \neg q \to (p \vee r)$

السؤال الثاني (3 درجات): بيّن فيما إذا كانت التقارير التالية صائبة أم خاطئة و علل إجابتك.

(أ) لكل عدد حقيقي x يكون $x^2 - 4x + 4 > 0$. (درجة و نصف)

خطأ , حيث $x = 2$ $0 > 0$ ↯

$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0$

(ب) يوجد عدد كسري x يحقق $x^2 = 7$. (درجة و نصف)

خطأ , لأن $x^2 = 7$ تقبل كحل لها

$x = \pm\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$

(1) أثبت أن " (n^2+n) هو عدد زوجي لكل n عدد صحيح". (درجتان)

- إذا كان n زوجي فإن $(n+1)$ فردي عندئذ $n^2+n=n(n+1)$ يكون زوجي (حاصل ضرب عدد زوجي بعدد فردي)

- إذا كان n فردي فإن $(n+1)$ زوجي عندئذ (n^2+n) يكون زوجياً (كحاصل ضرب عدد فردي بعدد زوجي)

(2) لتكن a و b أعداد صحيحة موجبة. استخدم طريقة البرهان بالمكافئ العكسي لاثبات ما يلي:
" إذا كان $(a^2+b^2\geq 8)$ فإن $a\geq 2$ أو $b\geq 2$". (درجتان)

1 المكافئ العكسي للعبارة هي " إذا كان $a<2$ و $b<2$ فإن $a^2+b^2<8$ "

الاثبات: بما أن $a<2$ فإن $a^2<4$

1 كذلك $b<2$ فإن $b^2<4$

بالجمع $a^2+b^2<8$

(3) باستخدام المبدأ الأول للاستقراء الرياضي، اثبت أن :
$1+2+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$ لكل عدد صحيح $n\geq 1$. (3 درجات)

نضع $P(n):\quad 1+2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$

• خطوة الأساس: $n=1$

$1+2^1 \overset{?}{=} 2^{1+1}-1$

$3 \quad = 4-1=3$

نضع وبالتالي $P(1)$ صائبة

1 • خطوة الاستقراء: نأخذ $k\geq 2$ ونفترض أن $P(k)$ صائبة $(1+2+\cdots+2^k=2^{k+1}-1)$ ولنثبت أن $P(k+1)$ يبقى صائباً

0,5 $1+2+\cdots+2^{k+1} \overset{?}{=} 2^{k+2}-1$

1,5 $\underbrace{1+2+\cdots+2^k}+2^{k+1}=(2^{k+1}-1)+2^{k+1}$

$=2.2^{k+1}-1=2^{k+2}-1$

ونستنتج أن لكل $n\geq 1$، $P(n)$ صائبة.

(4) ليكن $\{a_n\}_{n\geq1}$ متتالية معرفة استقرائيا كالاتي :
$$\begin{cases} a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = 3 \quad , \quad a_3 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + a_{n-1} + a_{n-2}), \forall n \geq 3 \end{cases}.$$

اثبت أن : $2 \leq a_n \leq 4$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$. (4 درجات)

نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي :

نضع $P(n) : 2 \leq a_n \leq 4$

• خطوة الأساسية :

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$2 \leq a_1 \leq 4$?	$2 \leq a_2 \leq 4$?	$2 \leq a_3 \leq 4$?
$a_1 = 2$	$a_2 = 3$	$a_3 = 4$
صح وبالتالي $P(1)$ صائب	صح وبالتالي $P(2)$ صائب	صح وبالتالي $P(3)$ صائب

(1,5)

• خطوة الاستقراء : نأخذ $k \geq 4$ ونفترض أن $P(4), \ldots, P(k)$ جميعها صائبة فلنثبت صحة $P(k+1)$

$2 \leq a_{k+1} \leq 4$?

(0,5)

نعلم أن $a_{k+1} = \frac{1}{3}(a_k + a_{k-1} + a_{k-2})$

بما أن $P(k)$ صائب لدينا $2 \leq a_k \leq 4$ (1)

كذلك $P(k-1)$ صائب لدينا $2 \leq a_{k-1} \leq 4$ (2)

أيضا $P(k-2)$ صائب لدينا $2 \leq a_{k-2} \leq 4$ (3)

بالجمع (1) + (2) + (3)

(1)

هذا يؤدي $2+2+2 \leq a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \leq 4+4+4$

(1)

عندئذ $\frac{6}{3} \leq \frac{1}{3}(a_k + a_{k-1} + a_{k-2}) \leq \frac{12}{3}$

يعني $2 \leq a_{k+1} \leq 4$