بوم الخميس 1439/6/20 هـ الزمن : ساعة ونصف.	الإمتحان الفصلي الأول 209 ريض الفصل الثاني 1439/1438 هـ,	جامعة الملك سعود- كلية العلوم قسم الرياضيات.

السؤال الأول (8) : أ) اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية :

$$\left\{\frac{n\cos(n)+1}{n^2+2}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad ، \quad \left\{\frac{e^{2n}}{\ln(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad ، \quad \left\{(-1)^n\frac{3n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\left\{(-1)^n\frac{n^2}{n^3+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

ب) برهن أن المتسلسلة التالية متقاربة وما هو مجموعها؟ .

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n(n+1)}-\left(\frac{-1}{3}\right)^n\right] .$$

السؤال الثانى (8) : اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n+1)}{n\sqrt{n}} \quad ، \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2} \quad ، \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad ، \quad \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{3n}{2n+3}\right) .$$

السؤال الثالث (9) : أ) اختبر التقارب المطلق والتقارب المشروط لكل من المتسلسلتين التاليتين :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n\,3^n} \quad ، \quad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1} .$$

ب) أوجد فترة ونصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n .$$

د/ ابرطان

تصحيح الاختبار الشهري الأول ٢٠٩ ريض
للفصل الثاني ٣٨/١٤٣٩ هـ

السؤال الأول (8 درجات)

(أ)

٠ $\left\{(-1)^n \dfrac{3n}{n+1}\right\}_{n\geq 1}$

$$a_n = (-1)^n \frac{3n}{n+1}$$

$$|a_n| = \frac{3n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3 \neq 0$$

1

وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{3n}{n+1}$ غير موجودة (متباعدة)

٠ $\left\{\dfrac{e^{2n}}{\ln(n+1)}\right\}_{n\geq 1}$, $a_n = \dfrac{e^{2n}}{\ln(n+1)}$

ندرس $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{\ln(x+1)} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\overset{\text{قاعدة لوبيتال}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{1/x+1}$$

1

$$= \lim_{x\to+\infty} 2(x+1)\, e^{2x} = \infty$$

٠ $\left\{\dfrac{n\cos(n)+1}{n^2+2}\right\}_{n\geq 1}$

نعلم $-1 \leq \cos n \leq 1$ لكل $n\geq 1$

$$-n \leq n\cos n \leq n$$

$$\frac{1-n}{n^2+2} \leq \frac{n\cos(n)+1}{n^2+2} \leq \frac{1+n}{n^2+2}$$

باستخدام مبرهنة الحصر $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n}{n^2+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+n}{n^2+2} = 0$

1

فنستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\cos(n)+1}{n^2+2} = 0$

٠ $\left\{(-1)^n \dfrac{n^2}{n^3+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{n^3+3}$

1

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^3+3} = 0$ فان $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \dfrac{n^2}{n^3+3} = 0$

ب) $\displaystyle (\ast)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n(n+1)}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right]=2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\right)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n}\right)$

• $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة باستخدام اختبار نهاية المقارنة مع $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

1,5

وباستخدام متتالية المجاميع الجزئية مجموعها 1 .

• $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n}$ متسلسلة هندسية متقاربة لأن $-1<r=-\frac{1}{3}<1$

1,5

و مجموعها يساوي $\dfrac{1}{1-(-1/3)}-1=-\dfrac{1}{4}$

فنستنتج أن $(\ast)$ متقاربة و مجموعها يساوي $S=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

1

السؤال الثاني (8 درجات)

• $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{3n}{2n+3}\right)$

بما أن $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{3n}{2n+3}\right)=\ln\left(\frac{3}{2}\right)\neq 0$

باستخدام اختبار التباعد فنستنتج أن $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{3n}{2n+3}\right)$ متباعدة.

2

• $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ، ندرس $\displaystyle\sum_{n=1}\left|\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|$ موجبة

نعلم أن $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\leq\frac{1}{n^2}$

باستخدام اختبار المقارنة ، نعلم $\sum\frac{1}{n^2}$ متقاربة

(متسلسلة p- حيث $p=2>1$)

فنستنتج أن $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ متقاربة.

2

• $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ متسلسلة موجبة لأن $a_n=\dfrac{1}{n(\ln n)^2}>0$ لكل $n\geq 2$

نستخدم اختبار التكامل. نأخذ $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ حيث $x\geq 2$

$f'(x)=\dfrac{-[(\ln x)^2-2\ln x]}{x^2(\ln x)^4}<0$ يعني f تناقصية

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{t\to+\infty}\left(\int_2^{t}\frac{dx}{x(\ln x)^2}\right)$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_2^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln t}\right] = \frac{1}{\ln 2} < \infty$$

و بالتالي $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ متقاربة . 2

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n+1)}{n\sqrt{n}}$ متسلسلة موجبة حيث $a_n = \frac{\sin^2(n+1)}{n\sqrt{n}} > 0$ لكل $n \geq 1$

نستخدم اختبار المقارنة نأخذ $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$

نرى أن $a_n \leq b_n$ و نعلم أن $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ متقاربة (متسلسلة-p حيث $p = 3/2 > 1$)

فنستنتج أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n+1)}{n\sqrt{n}}$ متقاربة . 2

السؤال الثالث (9 درجات)

(أ) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ متسلسلة مترددة

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right| = \sum_{n=2} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

باستخدام اختبار نهاية المقارنة مع $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة

1 الحين نستخدم اختبار المتسلسلة المترددة .

$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} > 0$ لكل $n \geq 2$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

1 يعني $\{a_n\}$ تناقصي

$$= \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} < 0$$

1 و بالتالي $\sum_{n=2} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ متقاربة تقاربا شرطيا.

• $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n\,3^n}$ متسلسلة مترددة

ندرس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\,3^n}$ (موجبة) نستخدم اختبار النسبة

1

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \cdot \frac{n\,3^n}{2^n}$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 2/3 < 1$$

1 فنستنتج أن $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n\,3^n}$ متقاربة تقاربا مطلقا

(ب) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n$ (*)

ندرس $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(x)|$ و نستخدم اختبار النسبة

2

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+2}}(x-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}}{3^n(x-1)^n}\right|$$

$$= 3|x-1|\sqrt{\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2}} = 3|x-1| = L$$

• إذا كان $L<1 \iff 3|x-1|<1 \iff |x-1|<1/3 \iff -1/3<x-1<1/3$

0,5 يعني $\frac{2}{3}<x<4/3$ فإن (*) متقاربة مطلقا

• إذا كان $L>1$ فإن $x>4/3$ أو $x<2/3$ فإن (*) متباعدة.

0,5 • إذا كان $L=1$ فإن $x=4/3$ أو $x=2/3$.

0,5 - عندما $x=4/3$ بالتعويض في (*)، تصبح $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ وهي متقاربة شرطيا.

- عندما $x=2/3$ بالتعويض في (*)، تصبح $\sum_n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ وهي متباعدة.

0,5 فنستنتج أن فترة التقارب هي $\left]\frac{2}{3}, 4/3\right]$

• نصف قطر التقارب $4/2 - 2/3 - 1/$