الاتصال و التكافئ التوبولوجي Continuity and Homeomorphism

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

19 أكتوبر 2019

المحتويات

الاتصال و التكافؤ التوبولوجي

سبق وأن تعرضنا لدوال عدة منها, الدالة المتباينة والشاملة والأحادية وغيرها. في هذا الباب ندرس واحدة من الدوال والتي قد تكون هي الأهم من بين جميع الدوال ليس في التوبولوجي فحسب إنما في جميع أفرع الرياضيات, وهي التي تسمى الدوال المتصلة. لدراسة الدالة المتصلة $f\colon X \longrightarrow Y$ علينا أن نفترض أن X و Y فضاءين توبولوجيين. سنرى فيما بعد السبب وراء ذلك. كلنا نتذكر أن الدالة المتصلة تلعب دورا رئيسيا في دراسة حساب التفاضل. بشكل عام, الدوال في حساب التفاضل والتكامل من الفضاء المعتاد $\mathbb{R}^n$ إلى الفضاء المعتاد $\mathbb{R}^m$. وعلى وجه الخصوص من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$. بالرغم من عدم الإشارة للتوبولوجي على $\mathbb{R}^n$ أو $\mathbb{R}$.

ولرؤية أن التوبولوجي المعتاد متضمن دعنا نتذكر تعريف الدالة المتصلة $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ عند النقطة $a \in \mathbb{R}$ كما يدرس في حساب التفاضل والتكامل " يقال إن الدالة متصلة عند a إذا وجد لكل $\varepsilon > 0$, عدد حقيقي موجب $\delta > 0$ بحيث إذا كانت $|x - a| < \delta$ فإن $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. أي, إ ذا كان x ينتمي للمجموعة المفتوحة $(a - \delta, a + \delta)$ فإن $f(x)$ ينتمي للمجموعة المفتوحة $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ في التوبولوجي المعتاد. أي, لكل مجموعة مفتوحة تحوي $f(x)$ توجد مجموعة مفتوحة $(a - \delta, a + \delta)$ تحوي x بحيث

$$f(a - \delta, a + \delta) \subset (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon).$$

ما نقدمه في هذا الباب تعريف عام للدالة المتصلة بين فضاءين توبولوجيين يمكن تطبيقه لجميع الحالات وكذلك لهذا التعريف الذي أوردناه آنفا. هذا ما ندرسه في الفصل الأول, كذلك نعطي تصنيفا للدوال المتصلة بشكل عام ثم نخصص نظرية لتصنيف $\delta - \varepsilon$.
أحد المسائل الأساسية في التوبولوجي هو تحديد ما إذا كان فضائين متكافئان توبولوجياً أم لا. بشكل عام لا توجد طريقة لحل هذه المسألة, لكن يوجد تقنيات أو أساليب تطبق في حالات معينة.
لإثبات أن فضائين متكافئين توبولوجيا يلزم إنشاء دالة متصلة بينهما ودالتها العكسية أيضا متصلة. ولإثبات أن فضائين غير متكافئين توبولوجيا فهذا موضوع مختلف. من أجل ذلك علينا أن نبين أن الدالة المتصلة ودالتها العكسية ليست موجودة. سندرس الخاصية التوبولوجية والتي تساعدنا على إثبات عدم التكافؤ التوبولوجي وليس التكافؤ التوبولوجي, بمعنى إذا استطعنا أن نجد خاصية توبولوجية تحقق لأحد الفضائين ولا تحقق للآخر, فإن الفضائين غير متكافئين في الباب الخامس أن التراص خاصية توبولوجية وبهذه الخاصية نثبت . توبولوجيا.

فمثلا وكما سنرى أن الفترة المغلقة لا تكافئ توبولوجيا الفترة المفتوحة حيث أن الأولى متراصة والثانية غير متراصة. هناك العديد من الخواص التوبولوجية والتي تمت دراسة بعضها مثل خاصية هاوزدورف والخاصية ندرسها في الأبواب اللاحقة. هذا سيكون محور دراستنا في الباب الثاني كما . المترية, وخواص أخر نعطي أمثلة لفضاءات متكافئة توبولوجا.

إن مفهوم الدالة المتصلة يعتبر أساسيا في الرياضيات. فمع بداية دراسة حساب التفاضل والتكامل نقابل اتصال الدوال على $\mathbb{R}$ ومن ثم على $\mathbb{R}^n$ كلما تعمقت دراستنا للرياضيات كلما ظهرت أنواع أخرى من الاتصال. في هذا الفصل سنعمم مفهوم الاتصال للدوال لأي دالة بين . فضائين توبولوجيين, وندرس بعض خواص الدوال المتصلة والتي في معظمها تعميما لما سبق دراسته في حساب التفاضل والتكامل.

تعريف

لتكن $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة من الفضاء X إلى الفضاء Y. يقال أن الدالة f متصلة عند $x \in X$ إذا وجد لكل مجموعة مفتوحة V في Y تحوي $f(x)$ مجموعة مفتوحة U تحوي x بحيث أن $f(x) \in f(U) \subset V$. إذا كانت f متصلة عند كل $x \in X$، نقول أن f متصلة على X.

مثال

إذا كانت $f\colon (X,\mathcal{I}_X)=(\mathbb{R},\mathcal{I}_X)\longrightarrow (Y,\mathcal{I}_Y)=(\mathbb{R},\mathcal{I}_Y)$ معرفة $f(x)=x$
ابحث اتصال f إذا كان:

1. $\mathcal{I}_X$ التوبولوجي المعتاد و $\mathcal{I}_Y$ التوبولوجي المتقطع.
2. $\mathcal{I}_X$ التوبولوجي المتقطع و $\mathcal{I}_Y$ التوبولوجي المعتاد.

نظرية

لتكن $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y فإن الشروط التالية متكافئة:

1. f دالة متصلة.
2. الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في Y مجموعة مفتوحة في X.
3. الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة في Y مجموعة مغلقة في X.
4. لكل مجموعة جزئية A في X فإن $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$
5. لكل مجموعة جزئية B في Y فإن $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$.

مثال

لتكن $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{I}_U) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{I}_U)$
دالة معرفة $f(x) = x^2$ فإن f متصلة.

تعريف

ليكن A فضاء جزئي من الفضاء التوبولوجي X. الدالة X $i\colon A \longrightarrow X$ والمعرفة $i(x) = x$ لكل $x \in A$ تسمى دالة الإحتواء (inclusion function)

تعريف

لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة X، ولتكن $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y. نعرف قصر الدالة f على المجموعة A بأنه الدالة $f_A : A \longrightarrow Y$ حيث $f_A(x) = f(x)$ لكل $x \in A$.

تعريف

لتكن $X_1, \dots, X_n$ مجموعات غير خالية. نعرف الدالة الإسقاطية $p_k\colon X = \prod_{j=1}^{n} X_j \longrightarrow X_k$ كما يلي $p_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$ لكل $1 \le k \le n$.

نظرية

(إنشاء دوال المتصلة)
ليكن X و Y فضائين توبولوجيين فإن:

1. الدالة الثابتة متصلة
2. دالة الإحتواء متصلة
3. تحصيل دالتين متصلتين دالة متصلة
4. الدالة الإسقاطية متصلة

نظرية

(الصياغة المحلية للاتصال)
ليكن X فضاء توبولوجي وليكن $\{U_j,\ j \in J\}$ تجمع من المجموعات المفتوحة في X بحيث $X = \cup_{j\in J} U_j$
فإن الدالة: $f\colon X \longrightarrow Y$ متصلة إذا وفقط إذا كانت f_{U_j} متصلة لكل U_j

نظرية

(تمهيد اللاصقة) (Pasting Lemma) ليكن $X = A \cup B$ فضاء توبولوجي. ولتكن $g\colon A \longrightarrow Y$ و $h\colon B \longrightarrow Y$ دالتين متصلتين بحيث أن g و h تتفقان على $A \cap B$ أي أن $g(x) = h(x)$ لكل $x \in A \cap B$. ولتكن $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in A \\ h(x) & x \in B \end{cases}$$

عندئذ f دالة متصلة إذا كانت A و B
إما كلاهما مجموعتين مفتوحتين أو كلاهما مجموعتين مغلقتين في X.

لتكن : $f\colon\ Y \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} X_j$ دالة ولتكن : $p_k\colon\ \prod_{j=1}^{n} X_j \longrightarrow X_k$ الدالة الإسقاطية لكل $k = 1, \ldots, n$. نعرف الدالة $f_k = p_k \circ f$ بأنها تحصيل الدالتين f و p_k. كذلك إذا كانت $f_k\colon\ Y \longrightarrow X_k$ دالة لكل $k = 1, \ldots, n$، نعرف الدالة $f\colon\ Y \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} X_j$ بأنها $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ لكل $x \in Y$.

تعريف

إذا كانت: $f\colon\ Y \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} X_j$ وكانت $f_k\colon\ Y \longrightarrow X_k$، $k = 1, \ldots, n$، دوال بحيث أن $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ لكل $x \in Y$. تسمى الدوال f_k مركبات الدالة f.

نظرية

إذا كانت: $f\colon\ Y \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} X_j$ دالة من الفضاء التوبولوجي Y إلى فضاء الجداء التوبولوجي $\prod_{j=1}^{n} X_j$. و $f_k\colon\ Y \longrightarrow X_k$, دوال من الفضاء التوبولوجي Y إلى الفضاء التوبولوجي X_k لكل $k = 1, \ldots, n$. فإن الدالة f متصلة إذا وفقط إذا كانت مركباتها متصلة.

نظرية

ليكن (X, d) و (Y, ρ) فضاءان متريان فإن الدالة $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة متصلة إذا وفقط إذا وجد لكل $x \in X$ ولكل $0 < \varepsilon$ عدد حقيقي موجب $0 < \delta$ بحيث إذا كان $d(x, y) < \delta$ فإن $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

و هذا متكافئ مع:

1. $y \in B_d(x, \delta)$ فإن $f(y) \in B_\rho(f(x), \varepsilon)$.
2. $f(B_d(x, \delta)) \subset B_\rho(f(x), \varepsilon)$.

الآن بالفطرة ومن تجربتان في التحليل: إذا كان x ينتمي لانغلاقيه المجموعة الجزئية A من الفضاء X، عندئذ توجد متتالية في A تتقارب من x هذا ليس صحيحا بشكل عام ولكنه صحيح للفضاءات التي تحقق المترية.

نظرية

(تمهيد المتتالية) (Sequence Lemma) ليكن X فضاء توبولوجي، ولتكن A مجموعة جزئية من X. إذا كانت $(x_n)_n$ متتالية في A متقاربة من x في X فإن $x \in \bar{A}$.
العكس صحيح إذا كان X يحقق المسألة المترية، أي إذا كان $x \in \bar{A}$ و X فضاء يحقق المسألة المترية. عندئذ توجد متتالية $(x_n)_n$ في A تتقارب من x في X.

التصنيف الأخير للدوال المتصلة في هذا الباب هو تصنيف الدوال المتصلة بالمتتابعات. كما هو في النظرية التالية.

نظرية

لتكن $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة حيث X فضاء متري فإن f متصلة إذا وفقط إذا كانت كل متتالية $(x_n)_n$ في X متقاربة من x في X فإن المتتالية $(f(x_n)_n)$ في Y متقاربة من $f(x)$ في Y.

نعطي الآن طرقا إضافية لإنشاء دوال متصلة.

نظرية

إذا كانت $g, f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ دالتين متصلتين من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء المعتاد $\mathbb{R}$، فإن الدوال $f \pm g$ ،fg متصلة. إذا كانت $g(x) \neq 0$ لكل x فإن الدالة $\dfrac{f}{g}$. متصلة.