الأعداد المركبة

د. المنجي بلال

16 جويلية 2017

المحتويات

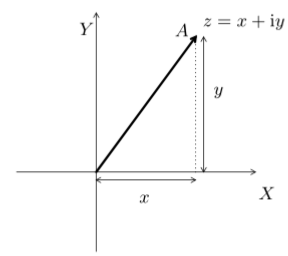
باب 1

الأعداد المركبة

1.1 التمثيل الديكارتي والقطبي للأعداد المركبة

تعريف 1.1.1
العدد المركب له الصيغة التالية $z = x + \mathrm{i}y$, مع x و y أعداد حقيقية و i عدد تخيلي يحقق $\mathrm{i}^2 = -1$.
العدد x يسمى الجزئ الحقيقي للعدد المركب z و العدد y يسمى الجزئ التخيلي للعدد المركب z و
نكتب: $x = \operatorname{Re} z$ و $y = \operatorname{Im} z$.
التمثيل $z = x + \mathrm{i}y$ يسمى التمثيل الديكرتي للعدد المركب z.
المجموعة $\mathbb{C}$ ترمز لمجموعة الأعداد المركبة.

توجد ثلاث أنواع من التمثيل الهندسي للعدد المركب $z = x + \mathrm{i}y$.
أ) النقطة $A = (x, y)$ في المستوي,
ب) المتجه $\overrightarrow{OA}$ من المركز إلى النقطة $A = (x, y)$,
ج) كل متجه موازي للمتجه $\overrightarrow{OA}$. و له نقس المقياس و نفس الإتجاه.



1.1.1 العمليات الجبرية على الأعداد المركبة

تعريف 1.1.2
ليكن $z = x + \mathrm{i}y$ و $w = u + \mathrm{i}v$ عددين مركبين.
نعرف جمع العددين z و w كما يلي:

$$z + w = x + u + \mathrm{i}(y + v)$$

و نعرف ضرب العددين كما يلي:

$$z.w = (ux - vy) + \mathrm{i}(uy + vx).$$

نظرية 1.1.1
مزود بالعمليات $(.,+)$, مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ هو حقل إبدالي.

رموز
لكل عدد مركب $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$, نكتب ما يلي:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$$

و لكل عدد طبيعي n

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}.$$

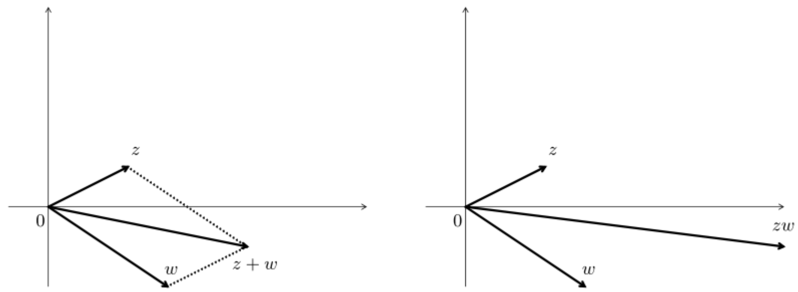
تمرين 1.1.1
أكتب الأعداد المركبة التالية في التمثيل الديكرتي $x + \mathrm{i}y$:
$z_1 = (1+\mathrm{i})^2, \quad z_2 = (1+\mathrm{i})^3, \quad z_3 = (1+\mathrm{i})^4, \quad z_4 = (1+\mathrm{i})^5, z_5 = (1+\mathrm{i})^6, \quad z_6 = (1+\mathrm{i})^7,$

$$z_7 = (1+\mathrm{i})^8, \quad z_8 = (1+\mathrm{i})^{-5}, \quad z_9 = \frac{1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$$

الحل:
$z_1 = (1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$, $z_2 = (1+\mathrm{i})^3 = -2+2\mathrm{i}$, $z_3 = (1+\mathrm{i})^4 = -4$,
$z_4 = (1+\mathrm{i})^5 = -4-4\mathrm{i}$,
$z_5 = (1+\mathrm{i})^6 = -8\mathrm{i}$, $z_6 = (1+\mathrm{i})^7 = 8-8\mathrm{i}$, $z_7 = (1+\mathrm{i})^8 = 16$,
$z_8 = (1+\mathrm{i})^{-5} = \dfrac{-1}{4(1+\mathrm{i})} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{8}$, $z_9 = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = \dfrac{-1-3\mathrm{i}}{2}$.

تعريف 1.1.3
ليكن $z = x + \mathrm{i}y$ عدد مركب، نعرف العدد المركب المراق للعدد z، العدد $\bar{z}$ المعرف كما يلي:

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}y.$$



هندسيا، نتحصل على العدد المرافق للعدد z باستعمال التناظر بالنسبة للمحور (ox).
إذا قمنا بالتناظر مرتين نتحصل على العدد z، أي:

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

تعريف 1.1.4
ليكن $z = x + \mathrm{i}y$. نعرف $|z|$ طول العدد المركب z (أو القيمة المطلقة للعدد المركب z) كما يلي:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

و هو طول المتجه $\overrightarrow{0A}$ إذا كان z هو العدد المركب المعرف بالنقطة A في المستوي.

خاصيات 1.1.1
ليكن $z, w \in \mathbb{C}$

1. إذا كان $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$، إذاً

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x - \mathrm{i}y}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \qquad (1.1)$$

2. $x = \operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}$.
3. $|z| = \sqrt{z\bar{z}} \geq 0$ و $|z| = 0$ إذا كان $z = 0$.
4. $z = \bar{z}$ إذا كان $z \in \mathbb{R}$, $z = -\bar{z}$ إذا كان $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
5. $|\bar{z}| = |z|$.
6. $|z.w| = |z|\ |w|$.
7. $\left|\dfrac{w}{z}\right| = \dfrac{|w|}{|z|}$, إذا كان $z \neq 0$.
8. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
9. $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$.

10. $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$.

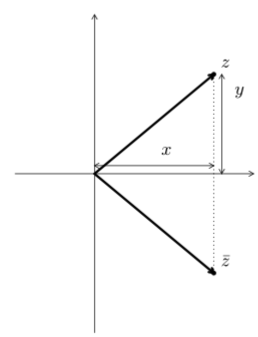
1.2 التمثيل القطبي للأعداد المركبة و تطبيقاتها

ليكن $z = x + \mathrm{i}y$ عدد مركب غير صفري و $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
العدد المركب $\frac{z}{r}$ يمثل نقطة A على دائرة الوحدة.
لتكن θ الزاوية التي بين $\overrightarrow{OA}$ و المحور (ox).
إذاً $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. (θ وحيد بقياس ضرب للعدد 2π).

تعريف 1.2.1 [الزاوية]
ليكن $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. كل عدد θ يحقق

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

يسمى زاوية للعدد المركب z و نرمز بها $\arg z$.
يوجد عدد لا نهائي من زوايى كل عدد مركب $z \neq 0$.
الزاوية للعدد z في المجال $]-\pi, \pi]$ تسمى الزاوية الأساسية للعدد المركب z و نرمز بها بـ: $\mathrm{Arg}z$ (*figure* (??)).



نحصل على ما يلي:

$$z = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta). \tag{1.2}$$

التمثيل للعدد المركب z يسمى التمثيل الهندسي للعدد z.

أمثلة 1.2.1

$$\arg \mathrm{i} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{Arg}\,\mathrm{i} = \frac{\pi}{2},$$

$$\arg(-1) = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$
$$\text{Arg}(-1) = \pi.$$

ملاحظة 1.2.1
ليكن $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = x + \mathrm{i}y$, إذا كان $\theta \in]-\pi, \pi[$. لنا ما يلي:
$x = r\cos\theta = 2r\cos^2(\frac{\theta}{2}) - r$ و $y = r\sin\theta = 2r\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})$.
$x + r = 2r\cos^2(\frac{\theta}{2})$.
$\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \tan(\frac{\theta}{2}) \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \tan^{-1}(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x})$.
Thus

$$\theta = 2\tan^{-1}(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}). \qquad (1.3)$$

مبرهنة 1.2.1
إذا كان α و β زاويتان للأعداد المركبة z و w على التوالي، فإنّ $\alpha + \beta$ هي زاوية للعدد المركب $z.w$.

البرهان
إذا كان z و w لهما التمثيل التالي:
$z = r(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$ و $w = s(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$.
إذاً

$$\begin{aligned} z.w &= rs(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) \\ &= rs(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \mathrm{i}(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)) \\ &= rs(\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)), \end{aligned}$$

وهي التمثيل القطبي للعدد المركب $z.w$, بما أنّ $|z.w| = |z||w| = rs$.

إذاً $\alpha + \beta$ زاوية للعدد المركب $z.w$.
باستعمال الإستقراء الرياضي نثبت ما يلي:

نتيجة 1.2.2
إذا كان $\theta_1, \ldots, \theta_n$ زوايا الأعداد المركبة $z_1, \ldots, z_n$ على التوالي، فإنّ $\theta_1 + \ldots + \theta_n$ زاوية للعدد المركب $z_1 \ldots z_n$.

إذا كان $\theta_1 = \ldots = \theta_n = \theta$ نحصل على النتيجة التالية:

نتيجة 1.2.3
إذا كان θ زاوية للعدد المركب z، فإنّ $n\theta$ زاوية للعدد المركب z^n.

مبرهنة 1.2.4
إذا كان θ زاوية للعدد المركب $z \neq 0$، فإنّ $-\theta$ زاوية للعدد المركب $z^{-1} = \frac{1}{z}$.

البرهان
ليكن θ زاوية للعدد المركب z. إذًا $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$، مع $r = |z|$.
إذًا

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} = z^{-1} &= r^{-1}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{-1} \\ &= r^{-1}(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) \\ &= r^{-1}(\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)). \end{aligned}$$

□

بما أن $|z^{-1}| = |z|^{-1} = r^{-1}$, إذًا $-\theta$ زاوية للعدد المركب z^{-1}.

نتيجة 1.2.5
إذا كان θ_1 و θ_2 زوايا للأعداد المركبة z_1 و z_2 على التوالي، فإنّ $\theta_1 - \theta_2$ زاوية للعدد المركب $\dfrac{z_1}{z_2}$.

ملاحظات 1.2.1

1. نشير إلى أنه إذا كان $z \neq 0$، فإنّ العددين $\dfrac{1}{\bar{z}}$ و z لهما نفس الزاوية.
   العدد $\dfrac{z}{|z|^2} = \dfrac{1}{\bar{z}}$ يسمى المتناظر للعدد z بالنسبة لدائرة الوحدة.
2. ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ و $z = re^{\mathrm{i}\theta}$، فإنّ $e^{\mathrm{i}\alpha}z = re^{\mathrm{i}(\alpha+\theta)}$ نترجم العملية $z \longmapsto e^{\mathrm{i}\alpha}z$ بالدوران حول المركز بالزاوية α.

تمرين 1.2.1
أو جد طول و زاوية العدد المركب التالي:

$$z = \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}\right)^{14}.$$

الحل $|z| = \dfrac{|1+\mathrm{i}\sqrt{3}|^{14}}{|1+\mathrm{i}|^{14}} = 2^7$.

$\arg z = 14\left(\arg(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) - \arg(1+\mathrm{i})\right) = 14(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{7\pi}{6}$.

من ناحية أخرى $\mathrm{Arg} z = -\frac{5\pi}{6}$.

تمرين 1.2.2

1. أثبت أنّ المستقيم $\mathscr{L}$ الذي يمر من النقاط z_1, z_2 متعامد على المستقيم $\mathscr{D}$ الذي يمر من النقاط z_3, z_4 إذا و إذا فقط إذا

$$\mathrm{Arg}\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = \pm\frac{\pi}{2}. \qquad (1.4)$$

2. ليكن z_1, z_2, و z_3 أعداد مركبة مختلفة و θ زاوية للعدد $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.
أثبت أنّ

$$|z_3 - z_2|^2 = |z_3 - z_1|^2 + |z_2 - z_l|^2 - 2|z_3 - z_1||z_2 - z_1|\cos\theta. \qquad (1.5)$$

الحل

1. يكون المستقيم $\mathscr{L}$ متعامدا على $\mathscr{D}$ إذا و إذا فقط إذا المتجهات $z_1 - z_2$ و $z_3 - z_4$ متعامدة.
بما أنّ $\arg\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = \arg(z_1 - z_2) - \arg(z_3 - z_4)$ و $\arg(z_1 - z_2) - \arg(z_3 - z_4) = \pm\frac{\pi}{2}[mod\ 2\pi]$, إذاً (1.4) محققة.

2. $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \left|\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right| e^{\mathrm{i}\theta}$.

$$\begin{aligned}
|z_3 - z_2|^2 &= |(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)|^2 \\
&= |z_3 - z_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 - \left((z_3 - z_1)\overline{(z_2 - z_1)} + \overline{(z_3 - z_1)}(z_2 - z_1)\right) \\
&= |z_3 - z_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 - |z_2 - z_1|^2\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} + \overline{\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)}\right) \\
&= |z_3 - z_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 - 2|z_2 - z_1|^2\left|\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right|\cos\theta
\end{aligned}$$

$$= |z_3 - z_1|^2 + |z_2 - z_l|^2 - 2|z_3 - z_1||z_2 - z_1| \cos\theta.$$

1.3 التمثيل الأسي للأعداد المركبة

تعريف 1.3.1
لكل عدد θ، نعرف العدد المركب $e^{\mathrm{i}\theta}$ كما يلي:

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,$$

و تسمى (**معادلة أولار**) *Euler's Formula*.
كذلك إذا كان $z = x + \mathrm{i}y$، نعرف العدد المركب e^z بما يلي:

$$e^z = e^x e^{\mathrm{i}y} = e^x (\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

خاصيات 1.3.1

أ) $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w$,

ب) $\mathrm{e}^z \mathrm{e}^{-z} = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$,

ج) $\mathrm{e}^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

د) $0 < \mathrm{e}^x < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$,

هـ) $\mathrm{e}^{\bar{z}} = \overline{\mathrm{e}^z}$,

ز) $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}| = 1$ لكل $y \in \mathbb{R}$، إذاً $|\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}| = \mathrm{e}^x$ لكل $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

ح) $\mathrm{e}^z \neq 0;\ \forall z \in \mathbb{C}$.

1.3.1 معادلة موافر

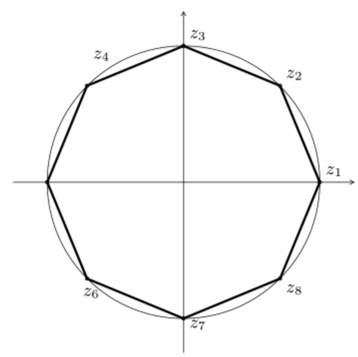
De Moivre's Formula

مبرهنة 1.3.1 (معادلة موافر)
لكل $n \in \mathbb{N}$،

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

كتطبيق للمعادلة $z^n = 1$، لنا ما يلي:

مبرهنة 1.3.2
المعادلة $z^n = 1$ لها n حلول مختلفة، و هي: $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ و تسمى حلول n للوحدة.
هذه الحلول موجودة فوق دائرة الوحدة $|z| = 1$.(أنظر (1.1) في حالة ما إذا كانت $n = 8$).
هذه الحلول هي رؤوس n مضلع منتظم.



شكل 1.1:

1.3.2 تطبيقات

1. إخطاط (Linearization) للعدد $\cos^n\theta$.
ليكن $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

$$\begin{aligned}\cos^n\theta &= \frac{1}{2^n}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^{n-2k}\\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(z^{n-2k}+z^{2k-n}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(n-2k)\theta.\end{aligned}$$

$\binom{n}{k}$ كذلك يرمز له C_n^k و يساوي $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

2. قيمة التكامل التالي: $\int_0^\pi \cos^4\theta d\theta.$

$$\begin{aligned}\cos^4\theta &= \frac{1}{2^4}\left(e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4\mathrm{i}\theta}+e^{-4\mathrm{i}\theta}+4e^{2\mathrm{i}\theta}+6+4e^{-2\mathrm{i}\theta}\right)\\ &= \frac{1}{8}\cos(4\theta)+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

إذًا

$$\int_0^{\pi}\cos^4\theta d\theta=\frac{3\pi}{8}.$$

كذلك

$$\int_0^{\pi}\cos^{2n}\theta d\theta=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}e^{\mathrm{i}2(n-k)\theta}d\theta=\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}=\frac{2n!}{(2^nn!)^2}.$$

3. المعادلة $z^n=a$، إذا كان $a\in\mathbb{C}^*$ لها الحل العام a باستعمال التمثيل القطبي للأعداد المركبة (1.2).

$$z^n=|a|e^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)},\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{1.6}$$

إذًا الحلول هي:

$$z_k=|a|^{\frac{1}{n}}e^{\frac{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)}{n}},\quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

4. إخطاط (Linearization) للمعادلات التالية:
$\cos^2(\theta)\sin(\theta)$ و $\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)$.

$$\begin{aligned}\cos^2(\theta)\sin(\theta) &= \frac{1}{8\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}\right)^2\left(e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta}\right)\\ &= \frac{1}{8\mathrm{i}}\left(e^{3\mathrm{i}\theta}-e^{-3\mathrm{i}\theta}+e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta}\right)\\ &= \frac{1}{4}(\sin(3\theta)+\sin(\theta)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) &= \frac{-1}{32}\left(e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}\right)^3\left(e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta}\right)^2\\ &= \frac{-1}{32}\left(e^{5\mathrm{i}\theta}+e^{-5\mathrm{i}\theta}+e^{3\mathrm{i}\theta}+e^{-3\mathrm{i}\theta}-2e^{\mathrm{i}\theta}-2e^{-\mathrm{i}\theta}\right)\\ &= \frac{-1}{16}\left(\cos(5\theta)+\cos(3\theta)-2\cos(\theta)\right).\end{aligned}$$

تمرين 1.3.1

أوجد حلول المعادلات التالية :

1. $e^z = 1$.
2. $e^z = \mathrm{i}$.
3. $e^z = -3$.

الحل

1. $e^z = 1 \iff e^z = e^{2\mathrm{i}k\pi};\ k \in \mathbb{Z} \iff fz = 2\mathrm{i}k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$
2. $e^z = \mathrm{i} \iff e^z = e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}+2\mathrm{i}k\pi};\ k \in \mathbb{Z} \iff z = \frac{\mathrm{i}\pi}{2} + 2\mathrm{i}k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$
3. $e^z = -3 \iff fe^z = e^{\ln 3+(2k+1)\mathrm{i}\pi};\ k \in \mathbb{Z} \iff z = \ln 3 + (2k+1)\mathrm{i}\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

$\square$

تمرين 1.3.2
ليكن

$$S = 1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \ldots + \cos(n\theta)$$

و

$$T = \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \ldots + \sin(n\theta),$$

إذا كان $\theta \neq 2k\pi$، $k \in \mathbb{Z}$.
أثبت أن

$$S = \frac{\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})\cos(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}, \qquad T = \frac{\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

(يمكن حساب العدد المركب $S + \mathrm{i}T$.)

Solution

$$\begin{aligned} S + \mathrm{i}T &= \sum_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}k\theta} = \frac{1 - e^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1 - e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\frac{1 - e^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} - e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}} \\ &= e^{\mathrm{i}\frac{n\theta}{2}}\frac{-2\mathrm{i}\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{-2\mathrm{i}\sin(\frac{\theta}{2})}. \end{aligned}$$

إذاً

$$S = \frac{\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})\cos(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}, \qquad T = \frac{\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

□

1.4 حلول بعض المعادلات

مبرهنة 1.4.1

إذا كان w *is a non-zero* عدد مركب, إذاًالمعادلة $z^2 = w$ لها حلين في $\mathbb{C}$.

البرهان

ليكن $w = a + \mathrm{i}b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

إذا كان $b = 0$ و $a > 0$، إذاً $z = \pm\sqrt{a}$ هما حلول للمعادلة.

إذا كان $b = 0$ و $a < 0$، إذاً $\pm\mathrm{i}\sqrt{-a}$ هم حلول للمعادلة.

إذا كان $b \neq 0$. المعادلة

$z^2 = w$ تصبح

$$(x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy = a + \mathrm{i}b,$$

مع $z = x + \mathrm{i}y$.

إذاً

$$x^2 - y^2 = a \text{ and } 2xy = b.$$

إذاً $x \neq 0$ و $y = \dfrac{b}{2x}$.

من ناحية أخرى

$$x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a.$$

إذاً $4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$ و $x^2 = \frac{a \pm |w|}{2}$ و $y = \dfrac{b}{2x}$.

□

كتطبيق:

1. أوجد حلول المعادلة $z^2 = 1 + 2\mathrm{i}$.

إذا كان $z = x + \mathrm{i}y$، فإنّ $x^2 - y^2 = 1$ و $xy = 1$.

إذاً $y = \dfrac{1}{x}$ و $x^4 - x^2 - 1 = 0$.

و نستنتج أنّ $x=\pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ و $y=\dfrac{1}{x}$. إذًا حلول المعادلة هي:

$$z=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right).$$

.2 أوجد حلول المعادلة $z^2+(1+\mathrm{i})z+1=0$.

$z^2+2(1+\mathrm{i})z-1=0 \iff (z+(1+\mathrm{i}))^2=1+2\mathrm{i} \iff z=-(1+\mathrm{i})\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right).$

.3 لتكن المعادلة من الدرجة الثانية التالية:

$$az^2+bz+c=0,$$

مع $a,b,c\in\mathbb{C}$ و $a\neq 0$.

$$\begin{aligned} az^2+bz+c=0 &\iff a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}=0\\ &\iff \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

أمثلة 1.4.1 .1 تحليل إلى عوامل المعادلة: z^5-1.

$$z^5-1=0 \iff z^5=e^{\frac{2ik\pi}{5}}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

إذًا حلول المعادلة z^5-1 هي:

$$z_k=e^{\frac{2ik\pi}{5}}, \quad k=0,1,2,3,4.$$

تحليل إلى عوامل المعدلة z^5-1 هي:

$$\begin{aligned} z^5-1 &= (z-1)(z-e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}})(z-e^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{5}})(z-e^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{5}})(z-e^{\frac{-4\mathrm{i}\pi}{5}})\\ &\quad (\textit{factorization in } \mathbb{C})\\ &= (z-1)(z^2-2z\cos(\frac{2\pi}{5})+1)(z^2-2z\cos(\frac{4\pi}{5})+1)\\ &\quad (\textit{factorization in } \mathbb{R}). \end{aligned}$$

ملاحظة 1.4.1
ليكن $\alpha = \cos(\frac{2\pi}{5})$ و $\beta = \cos(\frac{4\pi}{5})$.

$$\begin{aligned} z^5 - 1 &= (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1) \\ &= (z-1)(z^2 - 2z\cos(\frac{2\pi}{5})+1)(z^2-2z\cos(\frac{4\pi}{5})+1) \\ &= (z-1)(z^4 - 2z^3(\alpha+\beta) + 2z^2(1+2\alpha\beta) - 2z(\alpha+\beta)+1). \end{aligned}$$

و نستنتج أنّ α و β حلول للمعادلة التالية

$$X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} = 0.$$

إذاً $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ و $\cos(\frac{4\pi}{5}) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

2. تحليل إلى عوامل المعادلة $z^5 - \mathrm{i}$.

$$z^5 - \mathrm{i} = 0 \iff z^5 = e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}+2\mathrm{i}k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

إذاًحلول المعادلة $z^5 - \mathrm{i}$ هي:

$$z_k = e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{10}+\frac{2\mathrm{i}k\pi}{5}} = e^{\frac{(4k+1)\mathrm{i}\pi}{10}}, \quad k = 0,1,2,3,4.$$

تحليل إلى عوامل المعادلة $z^5 - \mathrm{i}$ في $\mathbb{C}$ هي:

$$z^5 - \mathrm{i} = (z-\mathrm{i})(z - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{10}})(z + e^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{10}})(z + e^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{10}})(z - e^{\frac{-3\mathrm{i}\pi}{10}}).$$

3. أوجد طول و زاوية العدد المركب $(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^{19}$.

$1-\mathrm{i}\sqrt{3} = 2e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$, إذاً, $|1-\mathrm{i}\sqrt{3}|^{19} = 2^{19}$ و زواياه هي $19(-\frac{\pi}{3}+2k\pi) = -\frac{\pi}{3}+2k'\pi$,
$k' \in \mathbb{Z}$.

4. أوجد حلول المعادلة التالية: $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^7 = -1$.

ليكن $w = \frac{z+1}{z-1}$.

حلول المعادلة $w^7 = -1$ هي $\alpha_k = e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{7}+\frac{2\mathrm{i}k\pi}{7}}$. إذا و إذا فقط إذا z هو حل للمعادلة

$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^7 = -1$.

إذاً $\frac{z+1}{z-1} = \alpha_k$. إذاً حلول المعادلة هي

$$z_k = \frac{\alpha_k + 1}{\alpha_k - 1}, \quad k = 0, \ldots, 6.$$

1.4.1 الأعداد المركبة والهندسة الإقليدية

نريد أن نقدم فكرة عن كيفية توسيط بعض الأشياء الهندسية، والتي سوف تكون مفيدة في وقت لاحق عندما نطرح تكامل الدوال المركبة على المنحنيات. سنقوم أساسا بتقديم توسيط الدوائر و المستقيمات و قطع المستقيم في $\mathbb{C}$.

1.4.2 المستقيمات

ليكن $\mathscr{L}$ مستقيما في المستوي $\mathbb{C}$.

- المستقيم يمكن تعريفه بنقطتين.

ليكن $\mathscr{L}$ مستقيما في المستوي $\mathbb{C}$ و الذي يمر من النقطتين a و b.
العدد المركب z يكون فوق المستقيم $\mathscr{L}$ إذا و إذا فقط إذا $(z-a) = \lambda(z-b)$، مع $\lambda \in \mathbb{R}$. و هذا متكافئ مع $(z-a)(\bar{z}-\bar{b}) \in \mathbb{R}$.
إذاً معادلة المستقيم $\mathscr{L}$ هي:

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{b}) = (\bar{z}-\bar{a})(z-b),$$

و هذا متكافئ مع

$$A\bar{z} + \bar{A}z + B = 0, \tag{1.7}$$

إذا كان $A = \mathrm{i}(a-b)$ و $B = \mathrm{i}(\bar{a}b - \bar{b}a) \in \mathbb{R}$.
(المتجه $\mathrm{i}(a-b)$ متعامد على المستقيم $\mathscr{L}$.)

- معادلة الموسط العمودي $\mathscr{L}$ للفترة $[a,b]$ هي:

$$|z-a| = |z-b| \tag{1.8}$$

i.e. $\mathscr{L} = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| = |z-b|\}$.

المعدلة (1.8) يمكن كتابتها في الإحداثيات الديكرتية كما يلي: (1.7) i.e. $\mathscr{L} = \{z \in \mathbb{C};\ A\bar{z} + \bar{A}z = B\}$، مع $A \in \mathbb{C}$ و $B \in \mathbb{R}$.

1.4.2 أمثلة

1. مثلا المحور (ox) يمكن أن تعريفه كما يلي:

أ) $\{z \in \mathbb{C};\ |z - \mathrm{i}| = |z + \mathrm{i}|\}$. في هذه الحالة يمكن توسيطه بالمعادلة (1.8) مع $a = \mathrm{i}$ و $b = -\mathrm{i}$.

ب) $z - \bar{z} = 0$. في هذه الحالة يمكن توسيطه بالمعادلة (1.7), مع $A = \mathrm{i}$ و $B = 0$.

1.4.3 قطعة مستقيم

قطعة مستقيم رؤوسه $a, b \in \mathbb{C}$ معرف بما يلي:

$$S = \{z \in \mathbb{C};\ z = (1-t)a + tb,\ 0 \leq t \leq 1\}.$$

سنرمز هذه المجموعة بما يلي: $[a, b]$.

1.4.4 الدئرة

المعادلة $|z - z_0| = r$، مع $z_0 \in \mathbb{C}$ و $r > 0$، تمثل الدائرة التي نصف قطرها r و مركزها z_0.

مثلا: المعادلة $|z - (2 + \mathrm{i})| = 2$ متكافئة مع $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ و تمثل الدائرة التي نصف قطرها 2 و مركزها $(2, 1)$.

كذلك المعادلة التالية

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \lambda, \tag{1.9}$$

مع a و b أعداد مركبة مختلفة و $\lambda > 0,\ \lambda \neq 1$.

بما أنّ $|z-a|^2 = |z|^2 + |a|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, a\bar{z}$، المعادلة (1.9) تصبح

$$|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\bar{z}\frac{a - \lambda^2 b}{(\lambda^2 - 1)}\right) = \frac{\lambda^2|b|^2 - |a|^2}{1 - \lambda^2}.$$

إذًا

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \lambda \iff \left|z - \left(\frac{a-\lambda^2 b}{1-\lambda^2}\right)\right| = \frac{\lambda|a-b|}{|1-\lambda^2|}, \qquad (1.10)$$

وهي معادلة الدائرة التي نصف قطرها $\frac{\lambda|a-b|}{|1-\lambda^2|}$ و مركزها $\frac{a-\lambda^2 b}{1-\lambda^2}$.

تمرين 1.4.1
أوجد نصف قطر الدائرة و $\mathscr{C}$ التي معادلتها

$$|z-2+i| = 2|z-3-i|.$$

الحل: باستعمال المعادلة (1.10)، مع $a = 2-\mathrm{i}$، $b = 3+\mathrm{i}$ و $\lambda = 2$، الدائرة $\mathscr{C}$ نصف قطرها $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ و مركزها $\frac{5(2+\mathrm{i})}{3}$.

1.5 الهندسية الإقليدية

1. ليكن $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ متحهين في $\mathbb{R}^2$ و z, w الأعداد المركبة المرتبطة بها. إذاً $\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = \operatorname{Re} z\overline{w}$.
($\langle\ ,\ \rangle$ هو الضرب الداخلي الإقليدي في $\mathbb{R}^2$.)

إذا كان $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$، $\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = ax+by$ و $z.\overline{w} = ax+by+\mathrm{i}(ay-bx)$. إذاً

$$\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = \operatorname{Re}(z\overline{w}).$$

2. ليكن A و B نقطتين في $\mathbb{R}^2$. المعادلة الدائرة التي قطرها $[A, B]$ هي: $\operatorname{Re}\left[(z-a)\overline{(z-b)}\right] = 0$.
إذا كان M على الدائرة $\mathscr{C}$ و قطرها $[A, B]$ إذا كان و إذا فقط

$$\langle\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\rangle = 0 \qquad (1.11)$$

وهي متكافئة مع

$$\operatorname{Re}\left[(z-a)\overline{(z-b)}\right] = 0. \qquad (1.12)$$

3. لتكن A نقطة في $\mathbb{R}^2$ و $\overrightarrow{u}$ متجه غير صفري و a, w الأعداد المركبة المرتبطة بها على التوالي. تكون نقطة M مرتبطة بعدد مركب z فوق المستقيم الموازي للمتجه $\overrightarrow{u}$ و يمر من النقطة A إذا وإذا كان فقط $\mathrm{Re}(z-a)\bar{w}=0$.
إذاً معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة A و موازي للمتجه $\overrightarrow{u}$ هي:

$$\mathrm{Re}\left[(z-a)\bar{w}\right]=0. \qquad (1.13)$$

معادلة المستقيم الموازي للمتجه $\overrightarrow{u}$ و يمر من النقطة A هي:

$$\mathrm{Re}\left[(z-a)\mathrm{i}\overline{w}\right]=0 \iff \mathrm{Im}\left[(z-a)\overline{w}\right]=0. \qquad (1.14)$$

مثلا معادلة المستقيم الموازي للمتحه $\overrightarrow{u}$، مع $w=1+\mathrm{i}$ و يمر من 0 هي $\mathrm{Re}\, z(1+\mathrm{i})=0 \iff y-x=0$ و معادلة المستقيم المتعامد على المتجه $\overrightarrow{u}$، مع $w=1+\mathrm{i}$ و يملر من 0 هي $\mathrm{Re}\, z(1-\mathrm{i})=0 \iff y+x=0$.

خاصيات 1.5.1
لكل نقاط A, B, C, D، لنا ما يلي:

1. $\dfrac{a-b}{c-d}\in\mathbb{R} \iff (AB)//(CD)$,
2. A, B, C على نفس الإستقامة إذا و فقط إذا $\dfrac{a-b}{b-c}\in\mathbb{R}$,
3. $\dfrac{a-b}{c-d}\in\mathrm{i}\mathbb{R} \iff (AB)\perp(CD)$,

مبرهنة 1.5.1
ليكن $f(z)=\dfrac{1}{z}$. صورة دائرة أو مستقيم دائرة تمر من 0 هو مستقيم يمر من 0 و صورة دائرة أو مستقيم لا يمر من 0 هو دائرة تمر من 0. (نعتبر أن المستقيم يمر من النقطة ∞ و صورة $f(0)=\infty$ و $f(\infty)=0$.)

البرهان
فيما يلي النقاط A و M مرتبطة بالأعداد المركبة a و z تباعا، و المتحه $\overrightarrow{u}$ مرتبط بالعدد المركب $w\neq 0$.

• ليكن $\mathscr{D}$ المستقيم حيث $0\notin\mathscr{D}$ و ليكن H الإسقاط العمودي للمركز 0 على $\mathscr{D}$. ليكن $\beta\neq 0$ العدد المركب المرتبط بالنقطة H. إذاً المتحه $\overrightarrow{0H}$ متعامد على $\mathscr{D}$.

$$M \in \mathscr{D} \iff \mathrm{Re}(z-\beta).\overline{\beta}=0 \overset{Z=\frac{1}{z}}{\iff} \mathrm{Re}(\frac{1}{Z}-\beta).\overline{\beta}=0 \iff \mathrm{Re}(Z-\frac{1}{\beta}).\overline{Z}=0$$

و هذه هي معادلة الدائرة التي قطرها $[0,A]$، مع $a=\dfrac{1}{\beta}$.

• ليكن $\mathscr{D}$ المستقيم الذي يمر من 0 و متعامد على $\overrightarrow{u}$.
معادلة هذا المستقيم هي: $\mathrm{Re}\, z.\overline{w}=0$.

إذا كان $Z=\dfrac{1}{z}$، فإنّ $\mathrm{Re}\, Zw=0 \iff \mathrm{Re}\, z.\overline{w}=0$ هي معادلة المستقيم الذي يمر من 0 و متعامد على الكتجه $\overrightarrow{v}$ المرتبط بالعدد المركب $\overline{w}$.

• لتكن $\mathscr{C}$ هي معادلة الدائرة التي نصف قطرها R و مركزها A. معادلة هذه الدائرة هي $|z-a|=R$.

إذا كان $Z=\dfrac{1}{z}$، فإن $|z-a|=R \iff 1-2\,\mathrm{Re}\, a.Z+(|a|^2-R^2)|Z|^2=0$.

• إذا كان $0\notin\mathscr{C}$، فإنّ $|a|\neq R$, المعادلة الماضية هي $1-2\,\mathrm{Re}\, a.Z+(|a|^2-R^2)|Z|^2=0 \iff |Z-\dfrac{\bar{a}}{|a|^2-R^2}|=\dfrac{R}{||a|^2-R^2|}$ هي معادلة الدائرة التي نصف قطرها $\dfrac{R}{||a|^2-R^2|}$ و مركزها B مرتبط بالعدد المركب $\frac{\bar{a}}{|a|^2-R^2}$.

• إذا كان $0\in\mathscr{C}$، فإنّ $|a|=R$ و المعادلة $1-2\,\mathrm{Re}\, aZ=0$ هي معادلة المستقيم.

مثال 1.5.1

1. صورة المستقيم المتعامد على المتجه $\overrightarrow{u}$ المرتبط بالعدد المركب $1+\mathrm{i}$ و الذي يمر من 0 بالدالة $f(z)=\dfrac{1}{z}$ هي المستقيم المتعامد على المتجه $\overrightarrow{v}$ المرتبط بالعدد المركب $1-\mathrm{i}$ و الذي يمر من 0.
2. صورة المستقيم المتعامد على المتجه $\overrightarrow{u}$ المرتبط بالعدد المركب $1+\mathrm{i}$ و الذي يمر من النقطة A، مع $a=1+\mathrm{i}$ بالدالة $f(z)=\dfrac{1}{z}$ هي الدائرة التي قطرها $[B,0]$، مع B النقطة المرتبطة بالعدد المركب $\frac{1-\mathrm{i}}{2}$.
3. صورة الدائرة التي نصف قطرها 2 و مركزها A، مع $a=\mathrm{i}$ بالدالة $f(z)=\dfrac{1}{z}$ هي الدائرة و التي نصف قطرها $\dfrac{2}{3}$ و مركزها B المرتبط بالعدد المركب $b=\dfrac{\mathrm{i}}{3}$.
4. صورة الدائرة التي نصف قطرها 1 و مركزها A، مع $a=\mathrm{i}$ بالدالة $f(z)=\dfrac{1}{z}$ هي المستقيم و التي معادلتها هي $\mathrm{Im}\, z=\dfrac{-1}{2}$.

1.6 التمثيل الديكارتي والقطبي للأعداد المركبة

1.7 متتاليات الأعداد المركبة

1.7.1 نهاية و تقارب المتتاليات

ليكن a عدد مركب، و ليكن r عدد حقيقي موجب.

نعرف القرص المفتوح $D(a,r)$ نصف قطره r و مركزه a المجموعة التالية:

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| < r\}.$$

نعرف كذلك القرص المغلق $\overline{D}(a,r)$ و الذي نصف قطره r و مركزه a المجموعة التالية:

$$\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| \le r\}.$$

و نعرف القرص المنقط و الذي نصف قطره r و مركزه a المجموعة

$$D^*(a,r) = D(a,r) \setminus \{a\}.$$

إذا كان $r=1$ و $a=0$،

القرص $D(0,1)$ يرمز له بـ D و يسمى قرص الوحدة.

تعريف 1.7.1

نقول أن متتالية من الأعداد المركبة $(z_n)_n$ متقاربة نحو عدد مركب $z \in \mathbb{C}$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ حيث لكل $n \ge N$، $z_n \in D(z,\varepsilon)$.

العدد المركب z يسمى نهاية المتتالية $(z_n)_n$ و يرمز لها

$$z = \lim_{n\to+\infty} z_n.$$

مبرهنة 1.7.1

لتكن $(z_n)_n$ متتالية من الأعداد مركبة، إذاً

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z \quad \text{and} \quad \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z.$$

البرهان

نذكر أنه إذا كان $z = x + \mathrm{i}y$ و $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$، then

$$\max(|x_n - x|, |y_n - y|) \le |z_n - z| \le |x_n - x| + |y_n - y|. \tag{1.15}$$

إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$ ، فإن $\forall\varepsilon > 0$، $\exists N \in \mathbb{N}$، حيث لكل $n \geq N$، $|z_n - z| < \varepsilon$. إذاً باستعمال المتباينة (1.15) $|x_n - x| < \varepsilon$ و $|y_n - y| < \varepsilon$ لكل $n \geq N$.
من ناحية أخرى إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ ، فإن $\forall\varepsilon > 0$، $\exists N \in \mathbb{N}$، حيث لكل $n \geq N$، $\max(|x_n - x|, |y_n - y|) < \frac{\varepsilon}{2}$. إذاً باستعمال المتباينة (1.15) $|z_n - z| < \varepsilon$ لكل $n \geq N$. □

1.7.2 معيار تقارب كوشي

تعريف 1.7.2
نقول أن متتالية $(z_n)_n$ هي كوشي إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$، حيث $|z_n - z_m| \leq \varepsilon$ لكل $n, m \geq N$.

مبرهنة 1.7.2 (معيار كوشي)
لتكن $(z_n)_n$ متتالية من الأعداد المركبة. الخصائص التالية متكافئة
أ) $(z_n)_n$ متقاربة.
ب) $(z_n)_n$ هي متتالية كوشي.

من السهل إثبات أن المتتالية $(z_n)_n$ هي كوشي إذا و إذا و فقط إذا كانت المتتاليات $(\operatorname{Re} z_n)_n$ و $(\operatorname{Im} z_n)_n$ هي متتاليات كوشي. إذاً برهان المبرهنة 1.7.2 هو نتيجة من معيار كوشي على $\mathbb{R}$.

1.7.3 النهاية العظمى و النهاية الصغرى لمتتالية

لتكن $(u_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية. لكل $n \in \mathbb{N}$، نعرف المجموعة التالية: $S_n = \{u_j;\ j \geq n\}$ و نعرف الأعداد التالية:

$$s_n = \sup S_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ and } \ell_n = \inf S_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

بما أن $S_{n+1} \subset S_n$، فالمتتالية $(s_n)_n$ تناقصية و المتتالية $(\ell_n)_n$ تزايدية. إذاً لهما نهاية في $\bar{\mathbb{R}}$.
نعرف

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} s_n$$

و

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \ell_n,$$

و تسمى على التوالي النهاية العظمى و النهاية الصغرى للمتتالية $(u_n)_n$.

ملاحظات 1.7.1

1. المتتالية $(u_n)_n$ لها نهاية إذا و إذا فقط إذا $\overline{\lim}_{n\to+\infty}u_n=\underline{\lim}_{n\to+\infty}u_n$.
2. لتكن $(u_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية و $S\subset\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ مجموعة نهايات المتتاليات الجزئية. ($s\in S$ إذا و إذا فقط إذا توجد متتالية جزئية $(u_{n_k})_k$ حيث $s=\lim_{k\to+\infty}u_{n_k}$).
كذلك
$$\overline{\lim}_{n\to+\infty}u_n=\sup S,\quad \underline{\lim}_{n\to+\infty}u_n=\inf S.$$

1.8 توبولوجيا مجموعة الأعداد المركبة

1.8.1 المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة

تعريف 1.8.1

- نقول أن مجموعة جزئية U من $\mathbb{C}$ هي مجموعة مفتوحة إذا كان، $U=\emptyset$ أو لكل $a\in U$، يوجد $r>0$ بحيث $D(a,r)\subset U$.
- نقول أن مجموعة جزئية F من $\mathbb{C}$ هي مجموعة مغلقة
إذا كانت المجموعة F^c مفتوحة.

مثال 1.8.1

1. نصف المستوي $H=\{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Re}z>r\}$، حيث r هو عدد حقيقي يمثل مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$.
ليكن $a\in H$ و $z\in D(a,\operatorname{Re}a-r)$، فإن $\operatorname{Re}a-r>|z-a|>\operatorname{Re}a-\operatorname{Re}z\Rightarrow$ $\operatorname{Re}z>r$. إذاً $D(a,\operatorname{Re}a-r)\subset H$ و هذا يثبت أن المجموعة H هي مفتوحة في $\mathbb{C}$.
2. القرص المفتوح $D(a,r)$ يمثل مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$. لأن إذا كان $b\in D(a,r)$، فإن $|b-a|<r$.
القرص المفتوح $D(b,r-|b-a|)$.
لكل $z\in D(b,r-|b-a|)$، $|z-a|=|z-b+b-a|\leq|z-b|+|b-a|<$ $r-|b-a|+|b-a|=r$.
إذاً $D(b,r-|b-a|)\subset D(a,r)$ و القرص المفتوح $D(a,r)$ هو مفتوح في $\mathbb{C}$.

مبرهنة 1.8.1
العبارات التالية صحيحة:
أ) المجموعة الخالية $\emptyset$ و $\mathbb{C}$ هي مجموعات مفتوحة.

ب) إذا كانت $(U_s)_{s\in I}$ مجموعة من المجموعات المفتوحة فإن المجموعة $\bigcup_{s\in I} U_s$ هي كذلك مفتوحة.
ج) إذا كانت U_j مجموعة من المجموعات المفتوحة فإن المجموعة $\bigcap_{j=1}^{n} U_j$ هي كذلك مفتوحة.

نستنتج من خصائص المجموعات المفتوحة خصائص المجموعات المغلقة:

مبرهنة 1.8.2
العبارات التالية صحيحة:
أ) المجموعة الخالية $\emptyset$ و $\mathbb{C}$ هي مجموعات مغلقة.
ب) إذا كانت $(F_s)_{s\in I}$ مجموعة من المجموعات المغلقة فإن المجموعة $\bigcap_{s\in I} F_s$ هي كذلك مغلقة.
ج) إذا كانت F_j مجموعة من المجموعات المغلقة فإن المجموعة $\bigcup_{j=1}^{n} F_j$ هي كذلك مغلقة.

1.8.2 إغلاق و داخل المجموعات

تعريفات 1 (إغلاق و داخل المجموعات)

1. لتكن مجموعة A في $\mathbb{C}$ و $\mathscr{C}_A$ مجموعة المجموعات المغلقة التي تحتوي على A. ($\mathscr{C}_A$ ليست المجموعة الخالية بما أن $\mathbb{C}\in\mathscr{C}_A$).
   تقاطع المجموعات في $\mathscr{C}_A$ يسمى إغلاق المجموعة A و نرمز له بـ $\overline{A}$. ($\overline{A}=\bigcap\limits_{B\in\mathscr{C}_A} B$).
   $\overline{A}$ هي مجموعة مغلقة و هي أصغر مجموعة مغلقة تحتوي على المجموعة A.
2. نعرف داخل المجموعة A و نرمز له بـ $\overset{o}{A}$ إتحاد كل المجموعات المفتوحة في A.
   $\overset{o}{A}$ هي أكبر مجموعة مفتوحة في المجموعة A.
3. نعرف حدود المجموعة A، المجموعة $\partial A=\overline{A}\backslash \overset{o}{A}$.

مثال 1.8.2
0 هي نقطة داخلية في المجموعة $D=\{z\in\mathbb{C};\ |z|<1\}$، لأن D هي مجموعة مفتوحة.
0 ليست نقطة داخلية في المجموعة $T=\{z\in\mathbb{C};\ |z-1|\le 1\}$ لأن لكل $r>0$، $-\dfrac{r}{2}\in D(0,r)$ و $-\dfrac{r}{2}\notin T$.
D مجموعة مفتوحة و T ليست مفتوحة.

مبرهنة 1.8.3
تكون مجموعة Ω مفتوحة في $\mathbb{C}$ إذا و إذا فقط إذا $\Omega=\overset{o}{\Omega}$.

البرهان

إذا كانت Ω مفتوحة، إذًا حسب التعريف كل نقطة في Ω هي نقطة داخلية، إذًا $\Omega \subset \overset{o}{\Omega}$. من ناحية أخرى، $\overset{o}{\Omega} \subset \Omega$. إذًا $\Omega = \overset{o}{\Omega}$. □

مبرهنة 1.8.4
تكون مجموعة F في $\mathbb{C}$ مغلقة إذا و إذا فقط إذا كل نهاية لمتتالية متقاربة $(z_n)_n \in F$ هي في F.

البرهان
لتكن F مجموعة مغلقة و $(z_n)_n$ متتالية متقاربة في F و نهايتها z. إذا كان $z \in F^c$، يوجد $r > 0$ بحيث $D(z,r) \subset F^c$. لأن F^c مجموعة مفتوحة. من ناحية أخرى، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $z_n \in D(z,r)$ لكل $n \geq N$، و هذا متناقض مع $z_n \in F$.

لنفرض أن F ليست مجموعة مغلقة، إذًا المجموعة F^c ليست مفتوحة. إذًا يوجد $z \in F^c$ بحيث لكل $r > 0$، $D(z,r) \cap F \neq \emptyset$.
إذًا لكل $n \in \mathbb{N}$، يوجد $z_n \in F$ بحيث $|z_n - z| < \frac{1}{n}$.
من البديهي أن المتتالية $(z_n)_n$ هي في F و تتقارب نحو
z و هو ليس في F، و هذا تناقض.

□

تعريف 1.8.2
لتكن A مجموعة غير خالية في $\mathbb{C}$. نقول أن المجموعة A كثيفة في $\mathbb{C}$ إذا كان $\overline{A} = \mathbb{C}$.

تعريفات 2

1. نقول أن عنصر $a \in A$ هو عنصر معزول إذا وجد $r > 0$ بحيث $D(a,r) \cap A = \{a\}$.
2. نقوا أن عنصر $a \in \mathbb{C}$ هي نقطة تراكم (*accumulation point*) للمجموعة A إذا كان لكل $r > 0$، $D(a,r) \setminus \{a\} \cap A \neq \emptyset$.

تمرين 1.8.1

1. لتكن A مجموعة غير خالية في $\mathbb{C}$.
أثبت أن

$$\overline{A} = \{z \in \mathbb{C}; \ \ \textit{exists a sequence } (z_n)_n \in A \textit{ and } \lim_{n \to +\infty} z_n = z\}.$$

2. أثبت أن نقطة z في $\mathbb{C}$ هي نقطة تراكم للمجموعة A إذا و إذا فقط إذا، توجد متتالية $(z_n)_n \in A$ متقاربة و نهايتها z و $z_n \neq z$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

الحل

1. نتيجة المبرهنة 1.8.4.
2. باستعمال التعريف 2، لكل $r > 0$، $D(z, r) \setminus \{z\} \cap A \neq \emptyset$. ليكن $r = r_1 = 1$، يوجد $z_1 \in D(z, r_1) \setminus \{z\} \cap A$. إذا كان $r = r_2 = \inf(\frac{1}{2}\,|z_1|)$، يوجد $z_2 \in D(z, r_2) \setminus \{z\} \cap A$. و باستعمال الإستقراء لكل $n \in \mathbb{N}$، إذا كان $r = r_n = \inf(\frac{1}{n}\,|z_{n-1}|)$، يوجد $z_n \in D(z, r_n) \setminus \{z\} \cap A$. المتتالية $(z_n)_n$ متقاربة و نهايتها z و $z_n \neq z$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

□

تعريف 1.8.3
لتكن A مجموعة غير خالية في $\mathbb{C}$. نعرف قطر المجموعة A و نرمز له بـ $Diam(A)$ أو $\delta(A)$

$$\delta(A) = \sup\{|z - w|;\ z, w \in A\}.$$

ملاحظة 1.8.1

1. نقول أن المجموعة A محدودة إذا و إذا فقط إذا $\delta(A)$ منته.
2. إذا كان $A \subset B$، فإن $\delta(A) \leq \delta(B)$.

تمرين 1.8.2
أثبت أن $\delta(\bar{A}) = \delta(A)$.

الحل
بما أن $A \subset \bar{A}$، فإن $\delta(A) \leq \delta(\bar{A})$.
من ناحية أخرى لكل $a, b \in \bar{A}$، يوجد $a_n, b_n \in A$ بحيث $|a_n - a| \leq \frac{1}{n}$ و $|b_n - b| \leq \frac{1}{n}$. إذاً $|a - b| \leq |a_n - b_n| + \frac{2}{n}$ و $\delta(\bar{A}) \leq \delta(A)$.

□

1.8.3 المجموعات المتراصة

تعريف 1.8.4
نقول أن مجموعة $K \subset \mathbb{C}$ متراصة إذا كان كل غطاء مفتوح للمجموعة K يحتوي على غطاء جزئي منته.

مبرهنة 1.8.5
ليكن K مجموعة غير خالية في $\mathbb{C}$. التالية الخصائص متكافئة:

1. K متراص،

2. (*The Bolzano-Weierstrass property*) كل مجموعة غير منتهية في K تحتوي على نقطة تراكم في K،

3. كل متتالية في K لها متتالية جزئية متقاربة في K.

البرهان

$(1 \Rightarrow 2)$ يكفي أن نثبت أن كل مجموعة غير منتهية A و قابلة للعد تحتوي على نقطة تراكم.
إذا كان $A = \{z_n;\ n \in \mathbb{N}\}$، $z_n \neq z_m$ لكل $n \neq m$ و $F_n = \{z_k;\ k \geq n\}$. المتتالية $(F_n)_n$ تناقصية. إذا كان $\bigcap_n F_n = \emptyset$، المتتالية $(U_n = F_n^c)_n$ هو غطاء مفتوح للمجموعة K. يوجد N بحيث $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} U_n$ و هذا متكافئ مع $\bigcap_{n=1}^{N} F_n = F_N = \emptyset$، و هذا تناقض. إذًا كل $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ هو نقطة تراكم للمجموعة A.
$(2 \Rightarrow 3)$ بديهي. (نناقش الحالة عندما تكون المجموعة منتهية والحالة عندما تكون المجموعة غير منتهية).
$(3 \Rightarrow 1)$ ليكن $(U_j)_{j\in I}$ غطاء مفتوح للمجموعة K. نريد أن نثبت أنه يوجد $r > 0$ بحيث لكل $z \in K$، يوجد $j \in I$ بحيث $D(a, r) \subset U_j$.
إذا كان غير صحيح، لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد $z_n \in K$ حيث القرص $D(z_n, \frac{1}{n})$ لسي موجود في أي مفتوح U_j.
توجد متتالية جزئية متقاربة $(z_{n_k})_k$ من المتتالية $(z_n)_n$. إذا كان $z = \lim_{k\to+\infty} z_{n_k}$، يوجد U_j حيث $z \in U_j$ و يوجد $s > 0$ حيث $D(z, s) \subset U_j$. من ناحية أخرى، يوجد $N \in \mathbb{N}$ حيث لكل $k \geq N$، $\dfrac{1}{n_k} < \dfrac{s}{3}$ و $|z - z_{n_k}| < \frac{s}{3}$. إذًا $D(z_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset U_j$، و هذا تناقض.

□

نتيجة 1.8.6
تكون مجموعة K في $\mathbb{C}$ متراصة إذا و إذا فقط إذا هي مغلقة و محدودة.

البرهان

إذا كانت K متراصة و $(z_n)_n$ متتالية متقاربة في K حيث $\lim_{n\to+\infty} z_n = z$. إذًا $z \in K$ بما أن K متراص، إذًا K مجموعة مغلقة.

نفرض أن K ليست محدودة. إذا كان $a \in K$ و نختار $(z_n)_n \in K$ بحيث $|z_n - a| \geq n$.
المتتالية $(z_n)_n \in K$ و لا تحتوي على متتالية جزئية متقاربة، و هذا يتناقض مع فرضية K متراص.

إذاً K محدودة.
إذا كان K مغلقة و محدودة و $(z_n)_n \in K$ متتالية في K، بما أن K محدودة، المتتالية محدودة و توجد متتالية متقاربة. بما أن K مغلق، هذه النهاية موجودة في K.
$\square$

1.9 الإتصال على المتراص

تعريف 1.9.1
لتكن X مجموعة مجزئية في $\mathbb{C}$ و $a \in X$. نقول أن دالة $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ متصلة في نقطة a إذا كان

$\forall \varepsilon > 0$، يوجد $\alpha > 0$ حيث لكل $z \in X$ و $|z - a| < \alpha$، نجد أن $|f(z) - f(a)| < \varepsilon.$
بتعبير آخر
$\forall \varepsilon > 0$، يوجد $\alpha_z > 0$ حيث $f(D(z, \alpha_z) \cap X) \subset D(f(z), \varepsilon)$.
نقول أن الدالة f متصلة على X إذا كانت متصلة في كل نقطة في X.

مبرهنة 1.9.1
تكون دالة $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ متصلة إذا و إذا فقط إذا، لكل متتالية متقاربة $(z_n)_n$ في X، المتتالية $(f(z_n))_n$ متقاربة و

$$\lim_{n \to +\infty} f(z_n) = f(\lim_{n \to +\infty} z_n).$$

مبرهنة 1.9.2
لتكن $f: K \to \mathbb{C}$ دالة متصلة. إذا كان K متراص، فإن $f(K)$ متراص.

البرهان

لتكن $(y_n)_n$ متتالية في $f(K)$. إذاً لكل $n \in \mathbb{N}$، يوجد $z_n \in K$ بحيث $y_n = f(z_n)$. المتتالية $(z_n)_n$ لها متتالية جزئية متقاربة $(z_{n_k})_k$. بما أن الدالة f متصلة، $(y_{n_k})_k = (f(z_{n_k}))_k$ هي كذلك متقاربة. إذاً $f(K)$ متراص.
$\square$

نتيجة 1.9.3
لنفرض أن $f: K \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة متصلة على مجموعة K متراصة. إذاً الدالة $|f|$ تحقق قيمتها العظمى و قيمتها الصغرى على K.

البرهان

$f(K)$ هي مجموعة متراصة، إذاً $f(K)$ مغلقة و محدودة. و بذلك $\inf|f(K)| \in |f|(K)$ و $\sup|f(K)| \in |f|(K).$ □

تعريف 1.9.2

نقول أن دالة $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ معرفة على مجموعة X متصلة بانتظام إذا
$\forall\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$ بحيث لكل $z, w \in X$ و $|z - w| < \delta$، فإن $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$.

مبرهنة 1.9.4

كل دالة متصلة على مجموعة متراصة فهي متصلة بانتظام.
على مجموعة متراصة K. *Then f is* بانتظام متصلة .

البرهان

لتكن $f\colon K \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة متصلة و K متلراص.
لكل $z \in K$ و لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $\alpha_z > 0$ بحيث $f(D(z, \alpha_z) \cap K) \subset D(f(z), \frac{\varepsilon}{2})$.
بما أن $\{D(z, \frac{\alpha_z}{2});\ z \in K\}$ هو غطاء مفتوح للمتراص K، يوجد $z_1, \ldots, z_n \in K$ بحيث $\{D(z_j, \frac{\alpha_{z_j}}{2});\ j = 1, \ldots, n\}$ هو غطاء مفتوح للمجموعة K.
إذا كان $\alpha = \min_{1\leq j\leq n} \frac{\alpha_{z_j}}{2} > 0$ و $z, w \in K$ بحيث $|z - w| < \alpha$، يوجد $j \leq n$ بحيث $z \in D(z_j, \frac{\alpha_{z_j}}{2})$. بما أن $|w - z_j| \leq |w - z| + |z - \alpha_{z_j}| < \alpha_{z_j}$، فإن

$$|f(z) - f(w)| \leq |f(z) - f(z_j)| + |f(z_j) - f(w)| < \varepsilon.$$

□

1.10 المجموعات المترابطة

تعريف 1.10.1

نقول أن مجموعة $X \subset \mathbb{C}$ مترابطة إذا كان من المستحيل أيجاد مجموعتين مفتوحتين و منفصلتين U و V بحيث $X \subset U \cup V$، $U \cap X \neq \emptyset$ و $V \cap X \neq \emptyset$.
نقول أن مجموعة A في X هي منطقة إذا كانت مفتوحة و مترابطة.

تعريف 1.10.2

نسمي ممر أو منحنى في $\mathbb{C}$ كل صورة لدالة متصلة $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$، حيث $[a, b]$ فترة مغلقة في $\mathbb{R}$.
نقول أن المنحنى γ أملس إذا كان γ قابل للمفاضلة لا نهائيا.

في هذه الحالة نقول γ هو تمثيل وسيطي للمنحنى.
و في ما يلي γ سنرمز كذلك للمنحنى.

نقول أن المنحنى $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$، $t \in [a,b]$ مغلق إذا كان $\gamma(a) = \gamma(b)$.
نقول أن المنحنى $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$، $t \in [a,b]$ مغلق و بسيط إذا كان $\gamma(s) = \gamma(t)$ يؤدي إلى أن $s = a$ و $t = b$ (أو $s = b$ و $t = a$).
نقول أن المنحنى γ موجه إيجابيا إذا كان اجتيازه عكس اتجاه عقارب الساعة.

مبرهنة 1.10.1
كل منحنى هو مترابط.

البرهان
ليكن $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ منحنى و لنفرض أن $\gamma([a,b])$ ليس مترابط. إذًا توجد مجموعتين غير خاليتين و مفتوحتين U و V بحيث $\gamma[a,b] \subset U \cup V$، $\gamma([a,b]) \cap U \neq \emptyset$ و $\gamma([a,b]) \cap V \neq \emptyset$.
يمكن أن نفرض أن $\gamma(a) \in U$ و $\gamma(b) \in V$.
لتكن المجموعة

$$A = \{t \in [a,b]; \gamma([a,t]) \subset U\}.$$

$a \in A$ و A محدودة. ليكن $s = \sup A$. من البديهي أن $s < b$.
إذا كان $\gamma(s) \in U$ و بما أن U مفتوحة، يوجد $s' > s$ حيث $s' \in A$، و هذا تناقض.
نفس النتيجة إذا كان $s \notin A$.
إذًا المنحنى مترابط. □

مبرهنة 1.10.2
لتكن المجموعة الجزئية X من $\mathbb{C}$ حيث كل نقطتين من X يمكن إيصالهما بمنحنى في X فإن X مترابط. من ناحية أخرى، إذا كانت Ω مجموعة مفتوحة مترابطة في $\mathbb{C}$، فإن كل نقطتين من Ω يمكن إيصالهما بمنحنى في Ω.

البرهان
|
إذا كان X ليس مترابط، توجد مجموعتين منفصلتين غير خاليتين و مفتوحتين U و V بحيث $X \subset U \cup V$، $U \cap X \neq \emptyset$ و $V \cap X \neq \emptyset$.
إذا كان $z \in U$ و $w \in V$، يوجد منحنى $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow X$ حيث $\gamma(a) = z$ و $\gamma(b) = w$.
بما أن المنحنى γ مترابط، فهذا مستحيل.
لنفرض الآن أن Ω مجموعة مترابطة مفتوحة. لنأخذ $z \in \Omega$ و نعرف المجموعة A مجموعة النقاط a في Ω بحيث يمكن ربط a و z بمنحنى في Ω.
لنفرض أن $a \in A$. بما أن $a \in \Omega$ يوجد قرص مفتوح D في Ω و مركزه a.

يمكن ربط النقطة z بكل نقطة $w \in D$ بمجاورة منحنى يربط z مع a و قطعة المستقيم $[a, w]$ في D.

إذاً $D \subset A$، و بذلك تكون المجموعة A مفتوحة.

إذا كان $b \in \bar{A}$ و $r > 0$ بحيث $D(b, r) \subset \Omega$.

إذا كان b ملتصق بالمجموعة A، يوجد $a \in A \cap D(b, r)$. إذاً يمكن ربط z بكل نقطة في $D(b, r)$ و بذلك تكون المجموعة A مغلقة.

هذا يثبت أن المجموعة A و A^c مفتوحتين.

Ω هو أتحاد للمجموعتين المنفصلتين و المفتوحتين A و A^c.

المجموعة A ليست خالية لأن $z \in A$. إذاً $A^c = \emptyset$. و هذا ينهي البرهان.

$\square$

مثال 1.10.1

نقول أن مجموعة $\Omega \subset \mathbb{C}$ محدبة إذا كان لكل $z, w \in \Omega$، قطعة المستقيم $[z, w]$ تكون في Ω.

إذاً كل مجموعة محدبة مترابطة.

1.11 تمارين الباب الأول

تمرين 1 :
أثبت أن $|z_1 - z_2| \leq ||z_1| - |z_2||$ لكل $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
تمرين 2 :
أثبت العبارات التالية:

$$z^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z^2 - 2z\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n}) + 1).$$

$$z^{2n+1} + 1 = (z+1)\prod_{k=0}^{n-1}(z^2 - 2z\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}) + 1).$$

$$z^{2n} - 1 = (z+1)(z-1)\prod_{k=1}^{n}(z^2 - 2z\cos(\frac{k\pi}{n}) + 1).$$

$$z^{2n-1} - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{n}(z^2 - 2z\cos(\frac{2k\pi}{2n-1}) + 1).$$

جزئ كثيرة الحدود $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2k}$ إلى عوامل إبتدائية و أثبت ما يلي:

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{2n}) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

تمرين 3 :
أوجد مقياس و زاوية الأعداد المركبة التالية:

$$1 - e^{\mathrm{i}\theta}, \quad 1 + e^{\mathrm{i}\theta} \quad e^{\mathrm{i}\theta} - e^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \theta, \varphi \in \mathbb{R}.$$

تمرين 4 :
أوجد حلول المعدلات التالية:

1. $z^3 = 1 + \mathrm{i}$،
2. $z^6 = 64$

3. $z^3 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$

تمرين 5 :
أوجد قيمة

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}.$$

تمرين 6 :
أوجد شرط لازم و كاف على الأعداد المركبة المختلفة z_1، z_2، و z_3 حتى يكونوا على نفس الإستقامة.

تمرين 7 :
أوجد صورة بالنسبة للدالة $f(z) = \dfrac{1}{z}$ للمنحنيات التالية:

1. المستقيم و التي معادلته $y = a$، حيث a عدد حقيقي موجب،
2. الدائرة و التي معادلته $|z-a| = r$، حيث $a > 0$ و $0 < r < a$،
3. مجموع الدوائر و التي معادلتها $x^2 + y^2 = 2ax$، $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$،
4. مجموع المستقيمات و التي معادلتها $y = \lambda x$، $\lambda \neq 0$.

تمرين 8 :
أثبت أن العلاقات التالية متكافئة:

لكل $z \in \mathbb{C}^*$، $z \in \mathbb{R} \quad \text{or} \quad |z| = 1 \iff z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

تمرين 9 :
ليكن z_1 و z_2 عديد مركبين حيث مقياسهما 1 و $z_1 z_2 \neq -1$. ليكن $w = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$.

1. أثبت أن w هو عدد حقيقي.
2. أحسب w بدلالة $\theta_1 = \arg z_1$ و $\theta_2 = \arg z_2$.

تمرين 10 :
أثبت أن $a = 2 + 3\mathrm{i}$ هو حل للمعادلة

$$z^4 - 5z^3 + 18z^2 - 17z + 13 = 0$$

و أوجد حلول المعادلة .

تمرين 11 :
أثبت أن لكل $z \neq 1$،

$$P(z) = 1 + 2z + \ldots + nz^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} = \frac{nz^{n+1} - (n+1)z^n + 1}{(z-1)^2}.$$

تمرين 12 :
أوجد حلول المعدلات التالية:

$$1 + z + \ldots + z^7 = \sum_{k=0}^{7} z^k = 0$$

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 = \sum_{k=0}^{3} (-z^2)^k = 0$$

$$(1-z)^n = (1+z)^n$$

$$(1-z)^n = z^n.$$

تمرين 13 :
ليكن $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. أحسب u^2 و u^4.
2. أوجد مقياس و زاوية للعدد u^4.
3. استنتج مقياس و زاوية للعدد u.

تمرين 14 :
أحسب بدلالة x و n المجموع التالي: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos^2 kx$.

تمرين 15 :
أوجد مجموعة النقاط M المرتبط بالعدد $z \in \mathbb{C}$ بحيث:

1. $z^2 = |z|$.
2. $|z - 2\mathrm{i}| = |\mathrm{i}\bar{z} + 4|$.
3. $\dfrac{z+1}{z-1}$ هو عدد حقيقي موجب.

تمرين 16 :

ليكن $E = \mathbb{C}\backslash\{-i\}$ و $f\colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة معرفة كما يلي: $f(z) = \dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$.

1. أثبت أن الدالة f أحادية.
2. أثبت أن $f(z) \neq 1 \quad \forall z \in E$.
3. أثبت أن $f(E) = \mathbb{C}\backslash\{1\}$.
4. ليكن $z \in E$، أثبت أن $1 - |f(z)|^2 = \dfrac{4\,\mathrm{Im}\,z}{|z+i|^2}$.
5. ليكن $\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ دائرة الوحدة. أثبت أن $f(\mathbb{R}) = \mathscr{C}\backslash\{1\}$.

تمرين 17 :

1. أوجد جذر تربيعي للعدد $-3-4\mathrm{i}$.
2. لتكن المعادلة التالية

$$z^3 - 2z^2 + \mathrm{i}z + 3 + \mathrm{i} = 0. \tag{1.16}$$

أوجد حل حقيقي للمعادلة (1.16) و أوجد حلول هذه المعادلة.

تمرين 18 :

1. أوجد الصيغة الأسية للعدد $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ و العدد $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$.
2. برر لماذا $\alpha_n = \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n$ هو عدد حقيقي لكل $n \in \mathbb{N}$.
3. أثبت أن α_n هو عدد طبيعي.
4. أوجد حلول المعادلة التالية

$$z^n = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}. \tag{1.17}$$

5. أوجد حلول المعادلة التالية

$$(z-\mathrm{i})^n(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = (\mathrm{i}+z)^n(1+\mathrm{i}\sqrt{3}). \qquad (1.18)$$

تمرين 19 :
صف هندسيا مجموعة النقاط z في $\mathbb{C}$ المعرفة بما يلي بالمعدلات التالية:

1. $\frac{1}{z} = \bar{z}$.
2. $\mathrm{Re}(z) = 3$.
3. $(1+\mathrm{i})z + (1-\mathrm{i})\bar{z} = 1.$

تمرين 20 :
لكل $a \in \mathbb{C}$ بحيث $|a| < 1$، نعرف الدالة $h_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$.

1. أثبت أن h_a معرفة جيدا على قرص الوحدة $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$.
2. أثبت أن fi $|z| = 1$، $|h_a(z)| = 1$ و fi $z \in D$، $h_a(z) \in D$.
3. أثبت أن h_a هي تقابل من D إلى D و أحسب الدالية العكسية لها.

تمرين 21 :

1. أثبت أن

$$\frac{1}{1+\frac{e^{\mathrm{i}x}}{2}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} e^{\mathrm{i}kx}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \times \frac{e^{\mathrm{i}(n+1)x}}{1+\frac{e^{\mathrm{i}x}}{2}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ و $\forall x \in \mathbb{R}.$

2. أوجد الجزئ الحقيقي و الجزئ التخيلي العدد المركب $\dfrac{1}{1+\frac{e^{ix}}{2}}$.

3. أثبت العبارات التالية:

$$\frac{4+2\cos x}{5+4\cos x} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k}\cos(kx)\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \times \frac{2\cos[(n+1)x] + \cos(nx)}{5+4\cos x}$$

$$\frac{2\sin x}{5+4\cos x} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\sin(kx)\right) + \frac{(-1)^n}{2^n} \times \frac{2\sin[(n+1)x] + \sin(nx)}{5+4\cos x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. و $\forall n \in \mathbb{N}$

4. أثبت وجود النهايات التالية و أوجد قيمتها:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k}\cos(kx), \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\sin(kx).$$

تمرين 22 :

1. أوجد حلول المعادلات التالية

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0. \qquad (1.19)$$

(الحل في الصيغة القطبية).

2. ليكن z حل للمعادلة (1.19) و $w = z + \frac{1}{z}$.
أثبت أن $w^2 = 1 - w$ و أوجد القيم الممكنة للعدد w.
استنتج القيمة الصحيحة للعدد $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

تمرين 23 :

1. ليكن $\Delta = (A, B, C)$ مثلث.
النقاط A, B, C مرتبطة بالأعداد المركبة على التوالي $\alpha, -\alpha$ و z.
a) أوجد قيم العدد z بحيث يكون المثلث $\Delta = (A, B, C)$ يكون متساوي الأضلاع في C.
b) أوجد قيم العدد z بحيث يكون المثلث $\Delta = (A, B, C)$ قائم الزاوية في C.

2. ليكن $\Delta = (A, B, C)$ مثلث.
النقاط A, B, C مرتبطة بالأعداد المركبة على التوالي α, β و γ.
a) أوجد شروط لازمة و كافية على α, β و γ بحيث يكون المثلث $\Delta = (A, B, C)$ متساوي الأضلاع.
b) أوجد شروط لازمة و كافية على α, β و γ بحيث تكون النقاط A, B, C على نفس الإستقامة.