الجداء التوبولوجي

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

12 فيفري 2020

المحتويات

الجداء التوبولوجي

في هذا الفصل سنقوم بدراسة الجداء التوبولوجي على عدد منته من الفضاءات التوبولوجية.
بمعنى إذا كان
$(X_1, \mathcal{I}_1), (X_2, \mathcal{I}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{I}_n)$
عدد منته من الفضاءات التوبولوجية، فهناك طريقة لتعريف توبولوجي على حاصل الضرب
$\prod_{j=1}^{n} X_j$ يرتبط بالتوبولوجي على X_j لكل $j = 1, \ldots, n$.

مبرهنة

لتكن $(X_1, \mathcal{I}_1), (X_2, \mathcal{I}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{I}_n)$ فضاءات توبولوجية، وليكن

$$\mathcal{B} = \{\prod_{j=1}^{n} U_j,\ \ U_j \in \mathcal{I}_j,\ \ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

فإن $\mathcal{B}$ قاعدة لتوبولوجي على $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$.

البرهان
نثبت أن $\mathcal{B}$
يحقق (ش 1) و (ش 2) للنظرية ??

ش 1) بما أن $X_j \in \mathcal{I}_j$ لكل $j = 1, \ldots, n$ فإن $\prod_{j=1}^{n} X_j \in \mathcal{B}$. وهذا يثبت (ش 1).

(ش 2) ليكن $B_1 = \prod_{j=1}^{n} U_j$ و $B_2 = \prod_{j=1}^{n} V_j$ حيث $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ولنفرض أن
$x = (x_1, \ldots, x_n) \in B_1 \cap B_2$. بالتالي فإن

$$B_1 \cap B_2 = \left(\prod_{j=1}^{n} U_j\right) \cap \left(\prod_{j=1}^{n} V_j\right) = \prod_{j=1}^{n} (U_j \cap V_j).$$

بما أن $U_j \cap V_j \in \mathcal{I}_j$ لكل $j = 1, \ldots, n$، فإن $B_1 \cap B_2 = \prod_{j=1}^{n}(U_j \cap V_j) \in \mathcal{B}$

الآن نأخذ $B_3 = B_1 \cap B_2$ وهذا يحقق (ش 2).

إذاً $\mathcal{B}$ قاعدة لتوبولوجي على $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$.

نظرية ?? تبين أن $\mathcal{I}[\mathcal{B}]$ المولد في النظرية ?? وحيد. هذا يتيح المجال للتعريف التالي:

تعريف

التوبولوجي $\mathcal{I}[\mathcal{B}]$ المولد من القاعدة $\mathcal{B}$ في نظرية ?? يسمى الجداء التوبولوجي على $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$. ويسمى الزوج $(X, \mathcal{I}[\mathcal{B}])$ فضاء الجداء التوبولوجي.

تعريف

ليكن $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_U)$ الفضاء المعتاد، فإن فضاء الجداء التوبولوجي $(\mathbb{R}^n, \mathcal{I}[\mathcal{B}])$ يسمى أيضاً التوبولوجي المعتاد على $\mathbb{R}^n$ حيث $1 \geq n$، أو يسمى فضاء إقليدس ذو بُعد n (n -dimensional Euclidian Space) .

النظرية التالية تجنبنا دراسة خواص الجداء التوبولوجي حيث جداء المجموعات المفتوحة قاعدة هذا التوبولوجي وبدلا من ذلك ندرس الخواص باستخدام جداء عناصر قاعدة كل توبولوجي، وذلك عند معرفتنا لقاعدة الفضاءات قيد الدراسة.

مبرهنة

إذا كانت $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ قواعد للفضاءات $(X_1, \mathcal{I}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{I}_n)$ على الترتيب، فإن الجداء $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n$ قاعدة لتوبولوجي على $\prod_{j=1}^{n} X_j$ يتطابق مع الجداء التوبولوجي على $\prod_{j=1}^{n} X_j$.

البرهان

نثبت أولاً أن $\mathcal{B}_X = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{B}_j = \{\prod_{j=1}^{n} B_j;\ B_j \in \mathcal{B}_j\}$ قاعدة لتوبولوجي على $\prod_{j=1}^{n} X_j$.

أولاً: نحقق الشرطين (ش 1 و (ش 2 للنظرية ??

(ش 1) ليكن $\prod_{j=1}^{n} X_j \ni (x_1, \ldots, x_n)$ لكل $x_j \in X_j$ فإنه يوجد $B_j \in \mathcal{B}_j$ بحيث $x_j \in B_j$ لكل $j = 1, \ldots, n$. بالتالي $(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{j=1}^{n} B_j = B \in \mathcal{B}_X$.

(ش 2) ليكن $U, V \in \mathcal{B}_X$ فإن $U = \prod_{j=1}^{n} U_j$ و $V = \prod_{j=1}^{n} V_j$، حيث $U_j, V_j \in \mathcal{B}_j$ لكل $j = 1, \ldots, n$. إذاً

$$U \cap V = \left(\prod_{j=1}^{n} U_j\right) \cap \left(\prod_{j=1}^{n} V_j\right) = \prod_{j=1}^{n} U_j \cap V_j.$$

ليكن $(x_1, \ldots, x_n) \in U \cap V$. إذاً $x_j \in U_j \cap V_j$ لكل $j = 1, \ldots, n$.

بما أن $\mathcal{B}_j$ قاعدة للتوبولوجي $\mathcal{I}_j$ و $U_j \cap V_j \in \mathcal{I}_j$ فمن نظرية ?? يوجد $B_j \in \mathcal{B}_j$ بحيث $x_j \in B_j \subset U_j \cap V_j$ لكل $j = 1, \ldots, n$ ومنه

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{j=1}^{n} B_j \subset \prod_{j=1}^{n} (U_j \cap V_j)$$

وهذا يحقق (ش 2). إذاً $\mathcal{B}_X$ قاعدة لتوبولوجي على $\prod_{j=1}^{n} X_j$.

ثانياً: نثبت الآن أن هذا التوبولوجي يتطابق مع الجداء التوبولوجي على $\prod_{j=1}^{n} X_j$. ليكن $\mathcal{I}[\mathcal{B}_X]$ التوبولوجي المولد من
$\mathcal{B}_X = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{B}_j = \{\prod_{j=1}^{n} B_j;\ B_j \in \mathcal{B}_j,\ j = 1, \ldots, n\}$
و $\mathcal{B} = \{\prod_{j=1}^{n} U_j;\ U_j \in \mathcal{I}_j,\ j = 1, \ldots, n\}$
قاعدة الجداء التوبولوجي. نثبت أن $\mathcal{I}[\mathcal{B}] \subset \mathcal{I}[\mathcal{B}_X]$.

ليكن $U \in \mathcal{B}$ و U و $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$. إذاً $U = \prod_{j=1}^{n} U_j$ حيث $U_j \in \mathcal{I}_j$ و $x_j \in U_j$، لكل $j = 1, \dots, n$. بما أن $\mathcal{B}_j$ قاعدة للتوبولوجي $\mathcal{I}_j$، فإنه يوجد $B_j \in \mathcal{B}_j$ بحيث $x_j \in B_j \subset U_j$. بالتالي $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{j=1}^{n} B_j \subset \prod_{j=1}^{n} U_j$. إذاً $\mathcal{I}[\mathcal{B}] \subset \mathcal{I}[\mathcal{B}_X]$.

الآن نثبت أن $\mathcal{I}[\mathcal{B}_X] \subset \mathcal{I}[\mathcal{B}]$. ليكن $x = (x_1, \dots, x_n) \in B = \prod_{j=1}^{n} B_j$، حيث $B_j \in \mathcal{B}_j$. بما أن $\mathcal{B}_j$ قاعدة للتوبولوجي $\mathcal{I}_j$ فإن $B_j \in \mathcal{I}_j$ ومنه فإن $\prod_{j=1}^{n} B_j \in \mathcal{B}$. بالتالي $x \in \prod_{j=1}^{n} B_j \subset \prod_{j=1}^{n} B_j$. إذاً $\mathcal{I}[\mathcal{B}_X] \subset \mathcal{I}[\mathcal{B}]$. طبقاً للنظرية، فإن المجموعة غير الخالية U من X مفتوحة في X إذا وفقط إذا وجد لكل $x = (x_1, \dots, X_n) \in U$ عنصر قاعدة $B = \prod_{j=1}^{n} B_j \in \mathcal{B}_X$ بحيث $(x_1, \dots, X_n) \in B \subset U$.

مثال

صف عناصر قاعدة التوبولوجي المعتاد على $\mathbb{R}^2$ وبالتالي $\mathbb{R}^n$ حيث $n \geq 2$.

نعلم أن $\mathcal{B} = \{(a,b);\ a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ قاعدة التوبولوجي المعتاد على $\mathbb{R}$ وبالتالي $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ قاعدة التوبولوجي المعتاد على $\mathbb{R}^2$. إذاً عنصر قاعدة التوبولوجي المعتاد على $\mathbb{R}^2$ هو المستطيل المفتوح
$(a,b) \times (c,d) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a < x < b,\ c < y < d\}$. بالمثل فإن عنصر قاعدة التوبولوجي المعتاد على $\mathbb{R}^n$ هو $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$

مبرهنة

لتكن $(X_1,\mathcal{I}_1),\dots,(X_n,\mathcal{I}_n)$ فضاءات توبولوجية، ولتكن $(A_1,\mathcal{I}_{A_1}),\dots,(X_n,\mathcal{I}_{A_n})$ فضاءات جزئية على الترتيب، فإن الجداء التوبولوجي والتوبولوجي الجزئي يتطابقان على $A=\prod_{j=1}^{n}A_j$.

البرهان

ليكن $\mathcal{I}_A$ و $\overline{\mathcal{I}}_A$ التوبولوجي الجزئي والجداء التوبولوجي على $A = \prod_{j=1}^{n} A_j$. من نظرية ?? فإن قاعدة التوبولوجي الجزئي هي $\mathcal{B}_A = \{(\prod_{j=1}^{n} U_j) \cap A;\ \ U_j \in \mathcal{I}_{X_j}\}$ وقاعدة الجداء التوبولوجي هي $\overline{\mathcal{B}_A} = \{\prod_{j=1}^{n} V_j;\ \ V_j \in \mathcal{I}_{A_j}\}$. نثبت أن $\overline{\mathcal{I}_A} \subset \mathcal{I}_A$ و $\mathcal{I}_A \subset \overline{\mathcal{I}_A}$

1. ليكن $B_1 = \prod_{j=1}^{n} V_j \in \overline{\mathcal{B}_A}$ من تعريف الفضاء الجزئي يوجد $U_j \in \mathcal{I}_{X_j}$ لكل $j = 1, \dots, n$، بحيث $V_j = U_j \cap A_j$. بالتالي
$$B_1 = \prod_{j=1}^{n} V_j = \prod_{j=1}^{n}(U_j \cap A) = \left(\prod_{j=1}^{n} U_j \cap \prod_{j=1}^{n} A_j\right) = (\prod_{j=1}^{n} U_j) \cap A \in \mathcal{B}_A$$
من تعريف الفضاء الجزئي يوجد $V_j \in \mathcal{I}_{A_j}$، $j = 1, \dots, n$ بحيث $V_j = U_j \cap A_j$. بالتالي فإن
$$B_2 = \left(\prod_{j=1}^{n} U_j \cap \prod_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod_{j=1}^{n}(U_j \cap A_j) = \prod_{j=1}^{n} V_j \in \overline{\mathcal{B}_A}$$
نأخذ الآن $B_1 \in \overline{\mathcal{B}_A}$ ليساوي B_2 فنحصل على $B_1 \subset B_2$.

مبرهنة

لتكن $(X, \mathcal{I}_X), (Y, \mathcal{I}_Y)$ فضاءات توبولوجية، ولتكن $(A, \mathcal{I}_A), (B, \mathcal{I}_B)$ فضاءات جزئية على الترتيب فإن $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

مبرهنة

لتكن $(X, \mathcal{I}_X)$ و $(Y, \mathcal{I}_Y)$ فضاءات توبولوجية، ولتكن $(A, \mathcal{I}_A)$ و $(B, \mathcal{I}_B)$ فضاءات جزئية على الترتيب، فإن:

أ) $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int} B$.

ب) $\mathrm{Bd}(A \times B) = (\mathrm{Bd}(A) \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \mathrm{Bd}(B))$.

ج) $(A \times B)' = (A' \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times B')$.

ملاحظة

نوه إلى أن النظريتين ?? و ??? متحققتان لجداء عدد منته من الفضاءات التوبولوجية.

تمرين 1 :
لتكن $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < 3,\ 1 \leq y < 5\}$ صف كلا من $\operatorname{Int}(A), \operatorname{Bd}(A)$، $\operatorname{Ext}(A)$، $\bar{A}$ و A'. إذا كان $\mathbb{R}^2$ مع (أ) التوبولوجي المعتاد (ب) توبولوجي المتممة المنتهية (ج) توبولوجي الشعاع الأيسر (د) التوبولوجي غير المتقطع (ه) التوبولوجي المتقطع.

تمرين 2 :
ليكن $\mathcal{B}$ تجمع كل المستطيلات نصف المفتوحة في المستوى $\mathbb{R}^2$، أي أن

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a < x < b,\ c < y < d\}.$$

بين أن $\mathcal{B}$ قاعدة لتوبولوجي على $\mathbb{R}^2$.

تمرين 3 :
إذا كان X و Y فضاءين وكان $X \times Y$ فضاء الجداء التوبولوجي. أثبت أن $A \times B \subset X \times Y$ كثيفة في $X \times Y$ إذا وفقط إذا كانت كلا من A و B كثيفة في X و Y على الترتيب.

تمرين 4 :
ليكن $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_{LL})$ فضاء النهاية السفلى، وليكن $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ أثبت أن

$$\mathcal{B} = \{[a, b) \times [c, d);\ \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$$

قاعدة لتوبولوجي على
Y