

الباب الأول

المعادلات التفاضلية العادية من الرتب العليا

1.1 مقدمة

تعريف 1

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n تكون على الصورة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b, \quad (1.1)$$

حيث a_0, \dots, a_n و b دوال متصلة على فترة (a, b) مع $a_0(x) \neq 0$ لكل $x \in (a, b)$

إذا كان $b = 0$ نقول إن المعادلة متجانسة، وإذا كانت $b \neq 0$ نقول إن المعادلة غير متجانسة

نظرية 1

لتكن المعادلة التفاضلية الخطية (1.1) *with* حيث a_0, \dots, a_n و b دوال متصلة على فترة (a, b) و $a_0(x) \neq 0$ لكل $x \in (a, b)$.
ليكن $x_0 \in (a, b)$ و c_0, \dots, c_{n-1} أعداد حقيقية. يوجد حل وحيد y للمعادلة (1.1) حيث $y(x_0) = c_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$. هذا الحل معرف على كامل الفترة (a, b) .

ملاحظة 1.

إذا كانت y_1, \dots, y_m حلولاً للمعادلة التفاضلية المتجانسة (1.1)، فإن لكل $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ حل للمعادلة التفاضلية المتجانسة $a_1 y_1 + \dots + a_m y_m$.

تعريف 2

لتكن f_1, \dots, f_m دوال معرفة على الفترة (a, b) . نقول أنها مرتبطة خطياً على الفترة (a, b) إذا وجدت a_1, \dots, a_n ليست كلها صفر حيث $a_1 f_1(x) + \dots + a_m f_m(x) = 0$ لكل $x \in (a, b)$ و غداً لم تكن كذلك نقول أنها مستقلة خطياً.

أمثلة 1.

1. الدوال $\sin x, \cos x$ مستقلة خطياً على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.
إذا كان $a \sin x + b \cos x = 0$ لكل $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ فإنه إذا كان $x = 0$ ، $b = 0$ وإذا كان $x = \frac{\pi}{2}$ ، فإن $a = 0$.
يمكن أن نثبت أن $\sin x, \cos x$ مستقلة خطياً على كل فترة.

2. الدوال $e^x, \sin x, \cos(2x)$ مستقلة خطياً على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.
إذا كان $ae^x + b \sin x + c \cos(2x) = 0$ لكل $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ، فإن إذا كان

يمكن كذلك نقوم بالإشتقاق ونحصل على: $ae^x + b \cos x - 2c \sin(2x) = 0$ لكل $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
 إذا كان $a + c = 0$ و $x = \frac{\pi}{2}$ ، $ae^{\frac{\pi}{2}} + b = 0$.
 كذلك إذا كان $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{2}$ ، نحصل على $a + b = 0$ و $a = 0$. وبالتالي
 $a = b = c = 0$.
 يمكن أن نثبت أن $e^x, \sin x, \cos x$ مستقلة خطيا على كل فترة.

3. الدوال $\sin x, \cos x, \sin(x+1)$ مرتبطة خطيا على كل فترة لأن $\sin(x+1) = \cos 1 \sin x + \sin 1 \cos x$.

نظرية و تعريف 1

المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (1.2)$$

لها n حلول مستقلة خطيا. كذلك إذا كانت f_1, \dots, f_n الحلول المستقلة خطيا للمعادلة (1.2)، فإن كل حل f للمعادلة (1.2) تركيب خطي للدوال f_1, \dots, f_n :

$$f = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n, \quad (1.3)$$

حيث $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. كتابة f في الصيغة (1.3) تسمى الحل العام للمعادلة المتجانسة (1.2) و $\{f_1, \dots, f_n\}$ يسمى مجموعة أساسية من الحلول.

باب 1. المعادلات التفاضلية العادية من الرتب العليا

1. مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة التفاضلية المتجانسة $y'' + y = 0$ هي $\{\sin x, \cos x\}$. وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة $y = a \sin x + b \cos x$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$.

2. تمثل المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية المتجانسة $y'' - 2y' + y = 0$ هي $\{e^x, xe^x\}$. وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة يكون $y = (ax + b)e^x$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$.

ملاحظة 2.

إذا كان y_1, \dots, y_m مستقلة خطياً، سنكون معادلة تفاضلية خطية من الرتبة m حيث $\{y_1, \dots, y_m\}$ تمثل المجموعة الأساسية لحلول هذه المعادلة.

نعطي الآن طريقة سهلة لمعرفة مجموعة n من الدوال وحلول للمعادلة (1.2) وتكون مستقلة خطياً.

تعريف 3

لتكن f_1, \dots, f_n دوال معرفة على فترة (a, b) وقابلة للاشتقاق للدرجة $(n-1)$. المحدد

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

يسمى الرونسكيان Wronskian للدوال f_1, \dots, f_n .

نظرية 2

لتكن f_1, \dots, f_n حلولاً للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n (1.2). تكون هذه الدوال مستقلة خطياً على الفترة (a, b) إلا وإذا كان الرونسكيان W ليس له أصفار على الفترة (a, b) .

كذلك

نظرية 3

الرونسكيان لدوال f_1, \dots, f_n حلول للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (1.2) يكون إما الدالة الصفرية أو ليس لها أصفار على الفترة (a, b) .

البرهان

باستعمال خصائص المحددات، نحصل على مايلي:

$$\begin{aligned} W'(x) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n)} & f_2^{(n)} & \dots & f_n^{(n)} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{a_1}{a_0} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{a_1}{a_0} W(x). \end{aligned}$$

و بالتالي

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}.$$

□

أمثلة 3.

1. لتكن $f(x) = \sin x$ ، $g(x) = \cos x$ على أي فترة مفتوحة (a, b) . الرونسكيان

للدالتين f و g ، $W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1$ و بالتالي فإن f, g مستقلة

باب 1. المعادلات التفاضلية العادية من الرتب العليا

خطيا على الفترة (a, b) .الدالتين f, g حلين للمعادلة التفاضلية الخطية $y'' + y = 0$.2. لتكن $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \cos x$ ، على أي فترة مفتوحة

$$W = \begin{vmatrix} e^x & \sin x & \cos x \\ e^x & \cos x & -\sin x \\ e^x & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 0, f, g, h \text{ الدوال الرونسيكان لـ } (a, b)$$

و $-2e^x$. وبالتالي فإن الدوال f, g, h مستقلة خطيا على الفترة (a, b) .الدوال f, g, h حلول للمعادلة التفاضلية الخطية $y'' - y' + y = 0$.3. لتكن $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ ، و $h(x) = \sin(x+1)$ على أي فترةمفتوحة (a, b) . الرونسيكان للدوال f, g, h ،

$$W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin(x+1) \\ \cos x & -\sin x & \cos(x+1) \\ -\sin x & -\cos x & -\sin(x+1) \end{vmatrix} = 0$$

الثالث متناسبان، فإن $W = 0$ والدوال f, g, h مرتبطة خطيا على الفترة (a, b) .الدوال f, g, h حلول للمعادلة التفاضلية الخطية $y'' + y = 0$.

نظرية 4

لتكن f_1, \dots, f_n دوال مستقلة خطيا على الفترة (a, b) من الدرجة C^n .
توجد معادلة تفاضلية خطية من الرتبة n حيث $\{f_1, \dots, f_n\}$ تمثل مجموعة أساسية
من الحلول للمعادلة.

البرهان

لتكن المعادلة التفاضلية الخطية المعرفة بما يلي:

$$\begin{vmatrix} y & f_1 & \dots & f_n \\ y' & f_1' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y^{(n-1)} & f_1^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \\ y^{(n)} & f_1^{(n)} & \dots & f_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

هذه المعادلة من الرتبة n لأن f_1, \dots, f_n مستقلة خطيا. ومن التعريف $\{f_1, \dots, f_n\}$ مجموعة أساسية من الحلول لهذه المعادلة.

□

أمثلة 4.

1. لتكن الدوال $f = \sin x$ و $g = \cos x$ على \mathbb{R} .
الدالتين f, g مستقلة خطيا. لتكن المعادلة المعرفة بما يلي:

$$\begin{vmatrix} y & \sin x & \cos x \\ y' & \cos x & -\sin x \\ y'' & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = y'' + y = 0.$$

الدالتان $\{f, g\}$ مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة $y'' + y = 0$.

2. لتكن الدوال $f = \sin x$ ، $g = \cos x$ و $h(x) = e^x$ على \mathbb{R} .
الدوال f, g, h مستقلة خطيا.

$$\begin{vmatrix} y & \sin x & \cos x & e^x \\ y' & \cos x & -\sin x & e^x \\ y'' & -\sin x & -\cos x & e^x \\ y^{(3)} & -\cos x & \sin x & e^x \end{vmatrix} = -2e^x(y^{(3)} - y'' + y' - y).$$

وبالتالي فإن الدوال $\{f, g, h\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة

$$y^{(3)} - y'' + y' - y = 0.$$

1.2 معادلات غير متجانسة

كل دالة y_p تحقق (1.1) تسمى حل خاص للمعادلة. مثلا، $\sin x$ حل خاص للمعادلة التفاضلية $xy'' + y' + xy = \cos x$.

ملاحظة 3.

إذا كانت y_1, \dots, y_m حلولاً للمعادلة المتجانسة (1.2) على فترة I و y_p حلاً خاصاً للمعادلة المتجانسة (1.1) على الفترة I ، فإن التركيب الخطي

$$c_1y_1 + \dots + c_my_m + y_p$$

يكون حلاً كذلك للمعادلة المتجانسة (1.1).

نظرية 5

ليكن y_p حلاً للمعادلة التفاضلية الغير المتجانسة (1.1) على فترة I ، وليكن $\{y_1, \dots, y_n\}$ مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة التفاضلية المتجانسة (1.2) على I ، فإن

$$y = c_1y_1 + \dots + c_ny_n + y_p$$

هو العام للحل للمعادلة (1.1) على الفترة I ، حيث $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

البرهان

ليكن y حلاً للمعادلة التفاضلية (1.1)، فإن الدالة $y - y_p$ حل للمعادلة المتجانسة (1.2).
و بالتالي يوجد $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ حيث $y = c_1y_1 + \dots + c_ny_n + y_p$. □

مثال 1.

لتكن المعادلة التفاضلية $(\sin x - \cos x)y'' + 2y' \sin x + y(\cos x + \sin x) = 2$ الدالة $\cos x$ تمثل حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية و $\{e^x, \sin x\}$ مجموعة أساسية من الحلول لهذه المعادلة. إذاً الحل العام لهذه معادلة هو $y = axe^x + b \sin x + \cos x$ ، $a, b \in \mathbb{R}$.

نظرية 6

لتكن المعادلة التفاضلية

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_1 + \dots + b_m, \quad (1.5)$$

حيث $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ دوال متصلة على فترة (a, b) .
إذا كان y_k حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية الغير المتجانسة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_k,$$

لكل $1 \leq k \leq m$ ، فإن $y_1 + \dots + y_m$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الغير المتجانسة (1.5).

مثال 2.

لتكن المعادلة التفاضلية $y'' + 2y' + y = e^x + 2e^{-x} + \sin x$

$\frac{1}{4}e^x$ حل خاص للمعادلة التفاضلية $y'' + 2y' + y = e^x$.

$x^2 e^{-x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

$-\frac{1}{2} \cos x$ حل خاص للمعادلة التفاضلية $y'' + 2y' + y = \sin x$. إذاً $y_p = \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2} \cos x$

حل خاص للمعادلة التفاضلية $y'' + 2y' + y = e^x + 2e^{-x} + \sin x$ هو $y_p = \frac{1}{4}e^x + x^2 e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x$.

1.3 تخفيض الرتبة

لتكن المعادلة المتجانسة

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0,$$

حيث a_1, \dots, a_n دوال متصلة على فترة (a, b) .

إذا كان y_1 حلاً للمعادلة التفاضلية و $y_1(x) \neq 0$ لكل $x \in (a, b)$

إذا كان $y_2 = u y_1$ حلاً، فإن الدالة u تحقق معادلة تفاضلية خطية من الرتبة n على الشكل

التالي: $y^{(n)} + b_1y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}y' = 0$.
هذه الطريقة تسمى طريقة تخفيض الرتبة.

أمثلة 5.

1. لتكن المعادلة التفاضلية $y'' - 3y' + 2y = 0$.
لتكن $y_1 = e^x$ حل للمعادلة التفاضلية. إذا كان $y_2 = uy_1$ حلاً، فإن $u'' - u' = 0$.
إذاً $u = a + be^x$ و $y_2 = e^{2x}$ الحل الثاني للمعادلة $y'' - 3y' + 2y = 0$ و y_1, y_2 مستقلة خطياً.

2. لتكن المعادلة التفاضلية $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$ على الفترة $(1, +\infty)$.
لتكن $y_1 = x$ حل للمعادلة. لتكن $y = xu$ حلاً على الصيغة $y = xu$ ، حيث u غير ثابتة.
الدالة u تحقق المعادلة التفاضلية التالية:

$$x(x^2 - 1)u'' + (3x^2 - 2)u' = 0 \text{ ونستنتج أن } u' = \frac{\lambda}{x^2\sqrt{x^2 - 1}} \text{ مع}$$

$$y_2 = \sqrt{x^2 - 1} \text{ حل.}$$

3. لتكن المعادلة التفاضلية $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$.
لتكن $y_1 = x$ حل للمعادلة التفاضلية. إذا كان $y_2 = xu$ حلاً، نحصل على: $x(x - 1)u'' + (-x^2 + 2x - 2)u' = 0$ و بالتالي فإن $u' = \left(\frac{e^x}{x}\right)'$ و $y_2 = e^x$ حل للمعادلة التفاضلية.

1.4 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة النونية ذات المعاملات الثابتة

1.4.1 المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة النونية ذات المعاملات الثابتة

لتكن المعادلة التفاضلية (1.2) حيث a_0, \dots, a_n أعداد حقيقية ثابتة.
نبحث عن حلول لهذه المعادلة التفاضلية على الصيغة التالية: $y = e^{rx}$ ، حيث r عدد ثابت.

1.4. المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة النونية ذات المعاملات الثابتة

تكون الدالة $y = e^{rx}$ حلاً للمعادلة التفاضلية (1.2) إلا وإذا كان

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

هذه المعادلة تسمى المعادلة المميزة للمعادلة (1.2).
في ما يلي، ندرس المعادلات الخطية من الرتبة 2 ذات المعاملات الثابتة.

$$y'' + ay' + by = 0$$

المعادلة المميزة $r^2 + ar + b = 0$ ، ولنا ثلاث حالات:

1. إذا كان $\Delta = a^2 - 4b > 0$ ، أي أن المعادلة المميزة لها جذرين مختلفين و حقيقيين

r_1 و r_2 .

تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة.

2. إذا كان $\Delta = 0$ ، المعادلة المميزة لها حل وحيد مكرر $r = -\frac{a}{2}$.

في هذه الحالة $\{e^{rx}, xe^{rx}\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة.

3. إذا كان $\Delta < 0$ ، فإن المعادلة المميزة لها حلين مختلفين كعديدين مركبين r_1 و r_2 .

إذا كان $r_1 = \alpha + i\beta$ و $r_2 = \alpha - i\beta$ ، فإن $\{e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x)\}$

يمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة.

أمثلة 6.

1. بالنسبة للمعادلة $y'' - 3y' + 2y = 0$ ، فإن $\{e^x, e^{2x}\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة.

2. بالنسبة للمعادلة $y'' + 4y' = 0$ ، فإن $\{1, e^{-4x}\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة.

3. بالنسبة للمعادلة $y'' + y' + y = 0$ ، فإن $\{e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x, e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\}$

تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة.

4. بالنسبة للمعادلة $y'' + 2y' + y = 0$ ، فإن $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة.

1.4.2 المعادلات التفاضلية الخطية الغير متجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

لتكن المعادلة التفاضلية

$$y'' + ay' + by = f(x). \quad (1.6)$$

نظرية 7

1. لتكن $\{y_1, y_2\}$ مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة المتجانسة. لكل دالة قابلة للتفاضل y على الفترة I ، توجد دالتين وحيدتين قابلتين للاشتقاق (U, V) على الفترة I حيث

$$\begin{cases} y = Uy_1 + Vy_2 \\ y' = Uy'_1 + Vy'_2 \end{cases} \quad (1.7)$$

2. إذا كان y حلاً للمعادلة التفاضلية $(??)$ ، توجد دالتين وحيدتين قابلتين للاشتقاق (U, V) على I حيث

$$\begin{cases} U'y_1 + V'y_2 = 0 \\ U'y'_1 + V'y'_2 = f \end{cases}$$

هذه الطريقة تسمى طريقة تغيير الثوابت.

البرهان

1. لكل $x \in I$ ، محدد مصفوفة النظام الخطي (1.7) $W(x) \neq 0$. إذاً يوجد حل وحيد للنظام التالي

$$U(x) = \frac{\begin{vmatrix} y(x) & y_2(x) \\ y'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)}, \quad V(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix}}{W(x)}.$$

2. إذا كان y حلاً للمعادلة التفاضلية $??$. توجد دالتين وحيدتين قابلتين للإشتقاق (U, V) على I وتحققان النظام (1.7). بعد الإشتقاق في المعادلة الأولى للنظام نحصل على:

$$U'y_1 + V'y_2 = 0. \quad (1.8)$$

بما أن y قابلة للإشتقاق مرتين، فإن

$$y'' = Uy_1'' + Vy_2'' + U'y_1' + V'y_2'.$$

تكون y حلاً للمعادلة التفاضلية $(??)$ إلا وإذا كان

$$\begin{cases} U'y_1 + V'y_2 = 0 \\ U'y_1' + V'y_2' = f \end{cases}.$$

هذا النظام هو نظام كرامر وله حل وحيد. $y = Uy_1 + Vy_2$. وبالتالي مجموع الحلول للمعادلة التفاضلية $(??)$ هو المجموعة $\{y = Uy_1 + Vy_2\}$ حيث U, V قابلتين للإشتقاق وتحقق النظام التالي:

$$\begin{cases} U'y_1 + V'y_2 = 0 \\ U'y_1' + V'y_2' = f \end{cases}.$$

□

$$1. \text{ لتكن المعادلة التفاضلية } y'' + y = \frac{1}{3 + \cos(2x)}.$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة $y = a \cos x + b \sin x$ باستعمال طريقة تغيير الثوابت $y = U \cos x + V \sin x$ ، نحصل على:

$$\begin{cases} U' \cos x + V' \sin x = 0 \\ -U' \sin x + V' \cos x = \frac{1}{3 + \cos(2x)}. \end{cases}$$

$$U = -\frac{1}{2} \tan^{-1}(\cos x) + a, \text{ إذا}$$

$$V = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{|\sqrt{2} + \sin x|}{|\sqrt{2} - \sin x|}\right) + b.$$

2. لتكن المعادلة التفاضلية $y'' + 4y' + 5y = \cosh(2x) \cos x$ المميزة للمجموعة $r^2 + 4r + 5 = (r + 2 + i)(r + 2 - i)$ المجموعة $\{e^{-2x} \cos(2x), e^{-2x} \sin(2x)\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة المتجانسة.

باستعمال طريقة تغيير الثوابت، الحل العام للمعادلة يكون على الصيغة التالية: $y =$

$$U'e^{-2x} \cos(x) + V'e^{-2x} \sin(x) = \text{حيث } Ue^{-2x} \cos(x) + Ve^{-2x} \sin(x)$$

$$U'e^{-2x} (-\sin(x) - 2 \cos(x)) + V'e^{-2x} (\cos(x) - 2 \sin(x)) = \cosh(2x) \cos(x). \text{ و } 0$$

$$\text{إذا } U = -\frac{1}{8} \cos(2x) + \frac{1}{20} e^{4x} \sin(2x) - \frac{1}{40} e^{4x} \cos(2x) + a$$

$$\cdot V = \frac{1}{40} e^{4x} \sin(2x) + \frac{1}{20} e^{4x} \cos(2x) + \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \sin(2x) + \frac{1}{16} e^{4x} + b$$

1.4.3 حالات خاصة

1. إذا كانت الدالة f كثيرة حدود بدرجة n . نبحث عن حل خاص للمعادلة التفاضلية (1.6) ككثيرة حدود.

• إذا كان $b \neq 0$ ، يوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية (1.6) ككثيرة حدود بدرجة n .

• إذا كان $b = 0$ ، $a \neq 0$ ، يوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية (1.6) ككثيرة حدود بدرجة $n + 1$.

• إذا كان $b = a = 0$ ، يوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية (1.6) ككثيرة حدود بدرجة $(n + 2)$.

2. إذا كانت $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$ ، حيث P كثيرة حدود بدرجة n . نقوم بالتغيير التالي: $y = e^{\alpha x} z$.

$$y'' = \alpha^2 y + 2\alpha e^{\alpha x} z' + e^{\alpha x} z'', \quad y' = \alpha e^{\alpha x} z + e^{\alpha x} z'$$

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= e^{\alpha x} P(x) = e^{\alpha x} (\alpha^2 z + 2\alpha z' + z'' + a\alpha z + az' + bz) \\ &= e^{\alpha x} (z'' + z'(a + 2\alpha) + z(\alpha^2 + a\alpha + b)). \end{aligned}$$

إذاً z يحقق المعادلة التفاضلية التالية

$$z'' + z'(a + 2\alpha) + z(\alpha^2 + a\alpha + b) = P(x).$$

• إذا كان α حلاً للمعادلة المميزة، توجد كثيرة حدود Q بدرجة n حيث تكون $e^{\alpha x} Q$ حلاً للمعادلة التفاضلية.

• إذا كان $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ و $a + 2\alpha \neq 0$ ، (يعني أن α حل بسيط للمعادلة المميزة (تعدد جبري 1)).
في هذه الحالة توجد كثيرة حدود Q بدرجة $n + 1$ حيث تكون $e^{\alpha x} Q$ حلاً للمعادلة التفاضلية.

• إذا كان $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ و $a + 2\alpha = 0$ ، (يعني أن α حل للمعادلة المميزة بتعدد جبري 2).
في هذه الحالة توجد كثيرة حدود Q بدرجة $n + 2$ حيث تكون $e^{\alpha x} Q$ حلاً للمعادلة التفاضلية.

1.5 معادلة كوشي أولار

1.5.1 معادلة كوشي أولار المتجانسة

معادلة كوشي أولار المتجانسة برتبة 2 هي معادلة تفاضلية على الصيغة التالية:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad (1.9)$$

حيث a, b أعداد حقيقية. يمكن تغيير هذه المعادلة التفاضلية بطريقتين إلى معادلة تفاضلية خطية متجانسة.

الطريقة الأولى تكون باستعمال التغيير التالي: $x = e^t$

$$z(t) = y(e^t) = y(x)$$

لتكن $z' = e^t y'(e^t) = xy'$ و $z'' = z' + x^2 y''(x)$ إذاً $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ معادلة تفاضلية خطية

$$az'' + (b-a)z' + cz = 0.$$

الطريقة الثانية تكون بالبحث عن حل خاص على الصيغة $y = x^r$

باستعمال هذا التغيير في المعادلة، نجد: $x^r (ar(r-1) + br + c) = 0$ حيث $x \neq 0$ ونحصل على $ar(r-1) + br + c = 0$

أمثلة 8.

1. لتكن معادلة كوشي أولار التالية: $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$. المعادلة التفاضلية التي

تحققها z هي: $z'' + 2z' - 3z = 0$ إذاً $z = ae^t + be^{-3t}$ و $y = ax + bx^{-3}$.

باستعمال الطريقة الثانية نحصل على: $r^2 + 2r - 3 = 0$. إذاً $r = 1$ أو $r = -3$ و $y = ax + bx^{-3}$

2. لتكن معادلة كوشي أولار التالية: $x^2y'' - 3xy' + 7y = 0$. المعادلة التفاضلية

التي تحققها z هي: $z'' - 4z' + 7z = 0$ إذاً $z = ae^{2t} \cos(\sqrt{3}t) + be^{2t} \sin(\sqrt{3}t)$

$$y = ax^2 \cos(\sqrt{3} \ln x) + bx^2 \sin(\sqrt{3} \ln x)$$

باستعمال الطريقة الثانية نحصل على: $r^2 - 4r + 7 = 0$. إذاً $r = 2 \pm i\sqrt{3}$ و

$$y = ax^2 \cos(\sqrt{3} \ln x) + bx^2 \sin(\sqrt{3} \ln x)$$

1.5.2 معادلة كوشي أولار الغير متجانسة

معادلة كوشي أولار الغير متجانسة تكون على الصيغة التالية:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = f. \quad (1.10)$$

لايجاد حلول هذه المعادلة نبحث عن مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة المتجانسة ونستعمل طريقة تغيير الثوابت.

مثال 3.

لتكن معادلة كوشي أولار التالية: $x^2y'' + 3xy' - 3y = e^x$.

تتمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة المتجانسة. و باستعمال طريقة تغيير الثوابت $y = Ux + Vx^{-3}$ نحصل على $U = \frac{1}{4}e^x$ ، $V' = -\frac{1}{4}x^4e^x$ و

$$V = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) \text{ إذاً } y = ax + bx^{-3} + e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)x^{-3}$$

1.5.3 أثر المؤثر التفاضلي على الدوال الأولية

1. الدالة الأسية :

$$De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}, \quad D^n e^{\lambda x} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

في هذه الحالة نقول إن الدالة $e^{\lambda x}$ دالة مميزة للمؤثر التفاضلي D بالنسبة للقيمة المميزة λ .

2. الدوال المثلثية

$$D^2 \sin(\lambda x) = -\lambda^2 \sin(\lambda x), \quad D^2 \cos(\lambda x) = -\lambda^2 \cos(\lambda x).$$

نقول إن الدوال $\sin(\lambda x)$ و $\cos(\lambda x)$ دوال مميزة للمؤثر التفاضلي D^2 بالنسبة للقيمة المميزة $-\lambda^2$.

3. الدوال x^k

$$D^n x^k = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n},$$

حيث $k \in \mathbb{N}$ و كحالة خاصة $D^n x^k = 0$ لكل $k < n$.

1.6 المؤثر التفاضلي D و المعادلات التفاضلية

1.6.1 كثيرات حدود للمؤثر التفاضلي D

تعريف 4

لتكن كثيرة حدود درجتها $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ حيث a_0, a_1, \dots, a_n أعداد حقيقية. إذا نقول إن المؤثر التفاضلي

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_1 D + \cdots + a_0$$

كثيرة حدود للمؤثر التفاضلي D و درجته n .

نظرية 8

إذا كان $P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_1 D + \cdots + a_0$ ، فإن

$$1. P(D)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x}$$

$$2. P(D^2) \sin(\lambda x) = P(-\lambda^2) \sin(\lambda x) \text{ و}$$

$$P(D^2) \cos(\lambda x) = P(-\lambda^2) \cos(\lambda x)$$

نثبت هذا النظرية باستعمال الإستقراء الرياضي.

نظرية 9

إذا كان $P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_1 D + \dots + a_0$ وإذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل من الدرجة n على \mathbb{R} ، فإن

$$D^n (e^{\lambda x} f(x)) = e^{\lambda x} (D + \lambda)^n f(x). \quad \bullet 1$$

$$P(D) (e^{\lambda x} f(x)) = e^{\lambda x} P(D + \lambda) f(x). \quad \bullet 2$$

البرهان

نثبت النظرية باستعمال الإستقراء الرياضي.

إذا كان $n = 1$:

$$\begin{aligned} D (e^{\lambda x} f(x)) &= \lambda e^{\lambda x} f(x) + e^{\lambda x} f'(x) \\ &= e^{\lambda x} (Df(x) + \lambda) \\ &= e^{\lambda x} (D + \lambda) f(x). \end{aligned}$$

نفرض أن النتيجة صحيحة إلى الحد n . إذاً

$$\begin{aligned} D^{n+1} (e^{\lambda x} f(x)) &= D (D^n (e^{\lambda x} f(x))) \\ &= D (e^{\lambda x} (D + \lambda)^n f(x)) \\ &= e^{\lambda x} (D + \lambda) ((D + \lambda)^n f(x)) \\ &= e^{\lambda x} (D + \lambda)^{n+1} f(x) \end{aligned}$$

نستنتج النتيجة (2) من النتيجة (1):

تعريف 5

نفسر النظرية السابقة على النحو التالي:

$$(D + \lambda)^n = e^{-\lambda x} D^n e^{\lambda x}.$$

الدالة $e^{\lambda x}$ والدالة $e^{-\lambda x}$ وقع النظر إليهما كمؤثرين تفاضلين.

تعريف 6

ليكن $P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$ كثيرة حدود للمؤثر التفاضلي D من الدرجة n . ونوات هذا المؤثر الخطي $P(D)$ هي مجموع الحلول للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n : $P(D)y = 0$.

نظرية 10

1. إذا كان $P(D) = (D - r_1)(D - r_2) \dots (D - r_n)$ حيث r_1, \dots, r_n مختلفة، فإن نواة المؤثر الخطي $P(D)$ هو الفضاء الخطي المولد بالدوال $\{e^{r_1 x}, \dots, e^{r_n x}\}$.

2. إذا كان $P(D) = (D - r_1)^{n_1}(D - r_2)^{n_2} \dots (D - r_k)^{n_k} = \prod_{j=1}^k (D - r_j)^{n_j}$ ، حيث r_1, \dots, r_k مختلفة و $\sum_{j=1}^k n_j = n$ ، فإن نواة المؤثر الخطي $P(D)$ هو الفضاء الخطي

$$\bigoplus_{j=1}^k \text{Vect} (e^{r_j x}, x e^{r_j x}, \dots, x^{n_j-1} e^{r_j x}),$$

حيث $\text{Vect} (e^{r_j x}, x e^{r_j x}, \dots, x^{n_j-1} e^{r_j x})$ هو الفضاء الخطي المولد بالدوال $\{e^{r_j x}, x e^{r_j x}, \dots, x^{n_j-1} e^{r_j x}\}$.

3. إذا كان $P(D) = ((D - \lambda_1)^2 + \beta_1^2) \dots ((D - \lambda_m)^2 + \beta_m^2)$ حيث $n = 2m$ و $\lambda_j \neq \lambda_k$ و $\beta_j \neq \beta_k$ لكل $j, k = 1, \dots, m$ ، فإن نواة المؤثر الخطي $P(D)$ هو الفضاء الخطي المولد بالدوال $\{e^{\lambda_1 x} \sin(\beta_1 x), e^{\lambda_1 x} \cos(\beta_1 x), \dots, e^{\lambda_m x} \sin(\beta_m x), e^{\lambda_m x} \cos(\beta_m x)\}$.

4. إذا كان $P(D) = ((D - \lambda_1)^2 + \beta_1^2)^{n_1} \dots ((D - \lambda_m)^2 + \beta_m^2)^{n_m} = \prod_{j=1}^m ((D - \lambda_j)^2 + \beta_j^2)^{n_j}$ ، حيث $\lambda_j \neq \lambda_k$ و $\beta_j \neq \beta_k$ لكل $j, k = 1, \dots, m$ ، فإن نواة المؤثر الخطي $P(D)$ هو الفضاء الخطي

$$\bigoplus_{j=1}^m \text{Vect} (e^{\lambda_j x} \sin(\beta_j x), e^{\lambda_j x} \cos(\beta_j x), \dots, x^{n_j-1} e^{\lambda_j x} \sin(\beta_j x), x^{n_j-1} e^{\lambda_j x} \cos(\beta_j x))$$

1.6.2 معكوس المؤثر التفاضلي

تعريف 7

لتكن $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة. باستعمال المبرهنة الأساسية للتحليل، نحصل على:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = D \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

معكوس المؤثر التفاضلي D^{-1} للمؤثر التفاضلي D يمكن تعريفه كما يلي:

$$D^{-1}f(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

كذلك نعرف باستعمال الإستقراء الرياضي معكوس المؤثر التفاضلي D^n ،

$$D^{-n}f(x) = D^{-n+1}(D^{-1}f(x)).$$

أمثلة 9.

$$D^{-1}x^r = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad 1.$$

$$D^{-2}x^r = \frac{x^{r+2}}{(r+1)(r+2)} + a_1x + a_2,$$

$$D^{-n}x^r = \frac{x^{r+n}}{(r+1)\dots(r+n)} + P_{n-1}(x),$$

بدرجته أقل أو يساوي $n-1$.

2. ليكن $\lambda \neq 0$

$$D^{-1}e^{\lambda x} = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} + c,$$

$$D^{-n}e^{\lambda x} = \frac{1}{\lambda^n}e^{\lambda x} + P_{n-1}(x),$$

يساوي $n-1$.

3. ليكن $\lambda \neq 0$ ،

$$D^{-1} \cos(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda x) + c = \frac{1}{\lambda} \cos(\lambda x - \frac{\pi}{2}) + c,$$

$$D^{-n} \cos(\lambda x) = \frac{1}{\lambda^n} \cos(\lambda x - \frac{n\pi}{2}) + P_{n-1}(x),$$

حيث P_{n-1} كثيرة حدود بدرجة أقل أو يساوي $n - 1$.

1.6.3 طريقة استعمال المؤثر التفاضلي لحل المعادلات التفاضلية الخطية الغير متجانسة

الشكل العام للمعادلات التفاضلية الخطية الغير متجانسة ذات المعاملات الثابتة تأخذ الشكل التالي:

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)y = P_n(D)y = f.$$

نريد استعمال استعمال المؤثر التفاضلي لإيجاد حل خاص لهذه المعادلات.

1.6.4 حالة $f(x) = e^{\lambda x}$

نظرية 11

1. إذا كان $P(\lambda) \neq 0$ ، فإن

$$y(x) = \frac{1}{P(\lambda)} e^{\lambda x}$$

حل خاص للمعادلة التفاضلية.

2. إذا كان $P(D) = (D - \lambda)^m Q(D)$ ، $1 \leq m \leq n$ مع $Q(\lambda) \neq 0$ ، فإن

$$y = \frac{1}{Q(\lambda)} \left(\frac{1}{m!} x^m + P_{m-1}(x) \right) e^{\lambda x}$$

حل خاص للمعادلة التفاضلية، حيث P_{m-1} كثيرة حدود درجتها أقل أو يساوي $m - 1$.

البرهان

$$P(D)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x}.$$

1. إذا كان $P(\lambda) \neq 0$ ، فإن

$$\frac{1}{P(\lambda)} [P(D)(e^{\lambda x})] = P(D) \left(\frac{e^{\lambda x}}{P(\lambda)} \right) = e^{\lambda x}.$$

إذا $y = \frac{1}{P(\lambda)} e^{\lambda x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية.

2. إذا كان $P(D) = (D - \lambda)^m Q(D)$ ، $1 \leq m \leq n$ و $Q(\lambda) \neq 0$ ، فإن المعادلة تصبح على الشكل $P(D)y = Q(D)(D - \lambda)^m y = e^{\lambda x}$. إذاً

حيث $y = \frac{1}{Q(\lambda)} \left(\frac{1}{m!} x^m + P_{m-1}(x) \right) e^{\lambda x}$
 P_{m-1} كثيرة حدود درجتها أقل أو يساوي $m - 1$. لأن

$$\begin{aligned} (D - \lambda)^m Q(D) \left[\left(\frac{1}{m!} x^m + P_{m-1} \right) e^{\lambda x} \right] &= Q(\lambda) (D - \lambda)^m \left(e^{\lambda x} \frac{1}{m!} x^m \right) \\ &= Q(\lambda) e^{\lambda x} D^m \left(\frac{1}{m!} x^m \right) \\ &= Q(\lambda) e^{\lambda x} \end{aligned}$$

□

مثال 4.

1. حل خاص للمعادلة التفاضلية

$$y'' - 2y' + 6y = e^{3x}.$$

$$y_p = \frac{e^{3x}}{3^2 - 2 \cdot 3 + 6} = \frac{1}{11} e^{3x}.$$

2. حل خاص للمعادلة التفاضلية

$$(D - 1)^3 (D + 2) (D - 2) y(x) = e^x.$$

is

$$y_p = \frac{e^x}{(1 + 2)(1 - 2)} \left(\frac{1}{3!} x^3 \right) = -\frac{x^3}{18} e^x.$$