المعادلات التفاضليةالعادية من الرتب العليا

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

25 سبتمبر 2019

المحتويات

تعريف

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n تكون على الصورة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b, \qquad (1)$$

حيث $a_0, \ldots, a_n$ و b دوال متصلة على فترة (a, b) مع $a_0(x) \neq 0$ لكل $x \in (a, b)$.
إذا كان $b = 0$ نقول إن المعادلة متجانسة، و إذا كانت $b \neq 0$ نقول إن المعادلة غير متجانسة

نظرية

لتكن المعادلة التفاضلية الخطية (1) with حيث $a_0, \ldots, a_n$ و b دوال متصلة على فترة (a, b) و $a_0(x) \neq 0$ لكل $x \in (a, b)$.
ليكن $x_0 \in (a, b)$ و $c_0, \ldots, c_{n-1}$ أعدادا حقيقية. يوجد حل وحيد y للمعادلة (1) حيث $y(x_0) = c_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$. هذا الحل معرف على كامل الفترة (a, b).

ملاحظة

إذا كانت $y_1, \ldots, y_m$ حلولا للمعادلة التفاضلية المتجانسة (1)، فإن لكل $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$، $a_1 y_1 + \ldots + a_m y_m$ حل للمعادلة التفاضلية المتجانسة.

تعريف

لتكن $f_1, \ldots, f_m$، دوالا معرفة على الفترة (a, b). نقول إنها مرتبطة خطيا على الفترة (a, b) إذا وجدت $a_1, \ldots, a_n$ ليست كلها صفر حيث $a_1 f_1(x) + \ldots + a_m f_m(x) = 0$ لكل $x \in (a, b)$. و إذا لم تكن كذلك نقول إنها مستقلة خطيا.

أمثلة

1. الدوال $\sin x, \cos x$ مستقلة خطيا على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.
إذا كان $a \sin x + b \cos x = 0$ لكل $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$، فإنه إذا كان $x = 0$،
$b = 0$ و إذا كان $x = \frac{\pi}{2}$، فإن $a = 0$.
يمكن أن نثبت أن $\sin x, \cos x$ مستقلة خطيا على كل فترة مفتوحة.

2. الدوال $e^x, \sin x, \cos(2x)$ مستقلة خطيا على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.
إذا كان $ae^x + b\sin x + c\cos(2x) = 0$ لكل $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$، فإنه إذا كان $x = 0$، $a + c = 0$ و إذا كان $x = \frac{\pi}{2}$، $ae^{\frac{\pi}{2}} + b = 0$.
يمكن كذلك أن نقوم بالإشتقاق و نحصل على:
$ae^x + b\cos x - 2c\sin(2x) = 0$ لكل $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
كذلك إذا كان $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{2}$، نحصل على $a + b = 0$ و $a = 0$. و بالتالي $a = b = c = 0$.
يمكن أن نثبت أن $e^x, \sin x, \cos x$ مستقلة خطيا على كل فترة.

3. الدوال $\sin x, \cos x, \sin(x+1)$ مرتبطة خطيا على كل فترة لأن $\sin(x+1) = \cos 1 \sin x + \sin 1 \cos x$.

نظرية

المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{2}$$

لها n حلول مستقلة خطيا. كذلك إذا كانت $f_1, \ldots, f_n$ حلولا مستقلة خطيا للمعادلة (2)، فإن كل حل f للمعادلة (2) هو تركيب خطي للدوال $f_1, \ldots, f_n$:

$$f = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n, \tag{3}$$

حيث $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. كتابة f في الصيغة (5) تسمى الحل العام للمعادلة المتجانسة (2) و $\{f_1, \ldots, f_n\}$ يسمى مجموعة أساسية من الحلول.

أمثلة

1. $\{\sin x, \cos x\}$ مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة التفاضلية المتجانسة $y'' + y = 0$. و بالتالي فإن الحل العام للمعادلة يكون $y = a\sin x + b\cos x$، حيث $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\{e^x, xe^x\}$ تمثل المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية المتجانسة $y'' - 2y' + y = 0$. و بالتالي فإن الحل العام للمعادلة يكون $y = (ax + b)e^x$، حيث $a, b \in \mathbb{R}$.

ملاحظة

إذا كان $y_1, \dots, y_m$ مستقلة خطيا، سنكون معادلة تفاضلية خطية من الرتبة m حيث $\{y_1, \dots, y_m\}$ تمثل المجموعة الأساسية لحلول هذه المعادلة.

نعطي الآن طريقة سهلة لمعرفة مجموعة n من الدوال و التي هي حلول للمعادلة (2) حتى تكون مستقلة خطيا.

تعريف

لتكن $f_1, \ldots, f_n$، دوال معرفة على فترة (a, b) و قابلة للإشتقاق للدرجة $(n-1)$. المحدد

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{4}$$

يسمى الرونسكيان Wronskian للدوال $f_1, \ldots, f_n$.

نظرية

لتكن $f_1, \ldots, f_n$ حلولا للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n (2).
تكون هذه الدوال مستقلة خطيا على الفترة (a, b) إلا و إذا كان الرونسكيان W ليس له أصفار على الفترة (a, b).

كذلك

نظرية

الرونسكيان لدوال $f_1, \ldots, f_n$ حلول للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (2) يكون إما الدالة الصفرية أو ليس لها أصفار على الفترة (a, b).

البرهان
باستعمال خصائص المحددات، نحصل على مايلي:

$$\begin{aligned} W'(x) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n)} & f_2^{(n)} & \cdots & f_n^{(n)} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{a_1}{a_0} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -\frac{a_1}{a_0} W(x). \end{aligned}$$

و بالتالي

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\, dt}.$$

أمثلة

1. لتكن $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ على فترة مفتوحة (a, b). الرونسكيان للدالتين f و g، $W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1$. و بالتالي فإن f, g مستقلة خطيا على الفترة (a, b).
الدالتين f, g حلين للمعادلة التفاضلية الخطية $y'' + y = 0$.
2. لتكن $f(x) = e^x$، $g(x) = \sin x$، $h(x) = \cos x$، على فترة مفتوحة (a, b). الرونسكيان للدوال f, g, h، يساوي $W = \begin{vmatrix} e^x & \sin x & \cos x \\ e^x & \cos x & -\sin x \\ e^x & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -2e^x$. و بالتالي فإن الدوال f, g, h مستقلة خطيا على الفترة (a, b).
الدوال f, g, h حلول للمعادلة التفاضلية الخطية $y^{(3)} - y'' + y' - y = 0$.

3 لتكن $f(x) = \sin x$، $g(x) = \cos x$، و $h(x) = \sin(x+1)$ على فترة مفتوحة (a, b). الرونسكيان للدوال f, g, h هو:

$$W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin(x+1) \\ \cos x & -\sin x & \cos(x+1) \\ -\sin x & -\cos x & -\sin(x+1) \end{vmatrix} = 0$$

. و بما أن الصف الأول و الثالث متناسبان، فإن $W = 0$ و الدوال f, g, h مرتبطة خطيا على الفترة (a, b). الدوال f, g, h حلول للمعادلة التفاضلية الخطية $y'' + y = 0$.

نظرية

لتكن $f_1, \ldots, f_n$ دوالا مستقلة خطيا على الفترة (a, b) من الدرجة C^n.
توجد معادلة تفاضلية خطية من الرتبة n حيث $\{f_1, \ldots, f_n\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة.

البرهان
لتكن المعادلة التفاضلية الخطية المعرفة بما يلي:

$$\begin{vmatrix} y & f_1 & \cdots & f_n \\ y' & f_1' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(n-1)} & f_1^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \\ y^{(n)} & f_1^{(n)} & \cdots & f_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

هذه المعادلة من الرتبة n لأن $f_1, \ldots, f_n$ مستقلة خطيا.
و من التعريف $\{f_1, \ldots, f_n\}$ مجموعة أساسية من الحلول لهذه المعادلة.

أمثلة

1 لتكن الدوال $f = \sin x$ و $g = \cos x$ على $\mathbb{R}$.
الدالتين f, g مستقلة خطيا. لتكن المعادلة المعرفة بما يلي:

$$\begin{vmatrix} y & \sin x & \cos x \\ y' & \cos x & -\sin x \\ y'' & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = y'' + y = 0.$$

الدالتان $\{f, g\}$ مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة $y'' + y = 0$.

2 لتكن الدوال $f = \sin x$، $g = \cos x$ و $h(x) = e^x$ على $\mathbb{R}$.
الدوال f, g, h مستقلة خطيا.

$$\begin{vmatrix} y & \sin x & \cos x & e^x \\ y' & \cos x & -\sin x & e^x \\ y'' & -\sin x & -\cos x & e^x \\ y^{(3)} & -\cos x & \sin x & e^x \end{vmatrix} = -2e^x(y^{(3)} - y'' + y' - y).$$

و بالتالي فإن الدوال $\{f, g, h\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة

$$y^{(3)} - y'' + y' - y = 0.$$

معادلات غير متجانسة

كل دالة y_p تحقق المعادلة التفاضلية (1) تسمى حل خاص للمعادلة.
مثلا، $\sin x$ حل خاص للمعادلة التفاضلية $xy'' + y' + xy = \cos x$.

ملاحظة

إذا كانت $y_1, \ldots, y_m$ حلولا للمعادلة المتجانسة (2) على فترة I و y_p حلا خاصا للمعادلة المتجانسة (1) على الفترة I، فإن التركيب الخطي

$$c_1 y_1 + \ldots + c_m y_m + y_p$$

يكون حلا كذلك للمعادلة المتجانسة (1).

نظرية

[الحل العام للمعادلة المتجانسة]
ليكن y_p حلا للمعادلة التفاضلية الغير المتجانسة ((1)) على فترة I، و ليكن $\{y_1, \ldots, y_n\}$ مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة التفاضلية المتجانسة (2) على I، فإن

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n + y_p$$

هو العام الحل للمعادلة (1) على الفترة I، حيث $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

البرهان
ليكن y حلا للمعادلة التفاضلية (1)، الدالة $y - y_p$ حل للمعادلة المتجانسة (2). و بالتالي يوجد $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$، حيث $y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n + y_p$.

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية $2 = (\sin x - \cos x)y'' + 2y' \sin x + y(\cos x + \sin x)$.
الدالة $\cos x$ تمثل حلا خاصا للمعادلة التفاضلية و $\{e^x, \sin x\}$ مجموعة أساسية من الحلول
لهذه المعادلة. إذاً الحل العام لهذه معادلة هو $y = axe^x + b \sin x + \cos x$، $a, b \in \mathbb{R}$.

نظرية

[مبدأ التراكب]
لتكن المعادلة التفاضلية

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b_1 + \ldots + b_m, \qquad (5)$$

حيث $a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ دوال متصلة على فترة (a, b).
إذا كان y_k حلا خاصا للمعادلة التفاضلية الغير المتجانسة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b_k,$$

لكل $1 \leq k \leq m$، فإن $y_1 + \ldots + y_m$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الغير المتجانسة (5).

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية $y'' + 2y' + y = e^{x} + 2e^{-x} + \sin x$.

$\frac{1}{4}e^{x}$ حل خاصل للمعادلة التفاضلية $y'' + 2y' + y = e^{x}$.

$x^{2}e^{-x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

$-\frac{1}{2}\cos x$ حل خاص للمعادلة التفاضلية $y'' + 2y' + y = \sin x$، إذاً $y_p = \frac{1}{4}e^{x} +$

$x^{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x$ حل خاص للمعادلة التفاضلية $y'' + 2y' + y = e^{x} + 2e^{-x} + \sin x$.

تخفيض الرتبة

لتكن المعادلة المتجانسة

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{6}$$

حيث $a_1, \ldots, a_n$ دوال متصلة على فترة (a, b).
إذا كان y_1 حلا للمعادلة التفاضلية و $y_1(x) \neq 0$ لكل $x \in (a, b)$.
إذا كان $y_2 = uy_1$ حلا، فإن الدالة u تحقق معادلة تفاضلية خطية من الرتبة n على الشكل التالي: $y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} y' = 0.$
هذه الطريقة تسمى طريقة تخفيض الرتبة.

أمثلة

1. لتكن المعادلة التفاضلية $y^{''} - 3y' + 2y = 0$.
$y_1 = e^x$ حل المعادلة التفاضلية. إذا كان $y_2 = uy_1$ حلا، فإن $u^{''} - u' = 0$.
إذاً $u = a + be^x$ و $y_2 = e^{2x}$ الحل الثاني للمعادلة $y^{''} - 3y' + 2y = 0$ و
y_1, y_2 مستقلة خطيا.
2. لتكن المعادلة التفاضلية $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$ على الفترة $(1, +\infty)$.
$y_1 = x$ حل للمعادلة. لتكن y حلا على الصيغة $y = xu$، حيث u غير ثابتة.
الدالة u تحقق المعادلة التفاضلية التالية:
$x(x^2 - 1)u^{''} + (3x^2 - 2)u' = 0$. و نستنتج أن $u' = \dfrac{\lambda}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}$ مع
$y_2 = \sqrt{x^2 - 1}$ حل.

3 لتكن المعادلة التفاضلية $(x-1)y'' - xy' + y = 0$.
$y_1 = x$ حل للمعادلة التفاضلية. إذا كان $y_2 = xu$ حلا، نحصل على:
$x(x-1)u'' + (-x^2+2x-2)u' = 0$، و بالتالي فإن $u' = \left(\frac{e^x}{x}\right)'$ و
$y_2 = e^x$ حل للمعادلة التفاضلية.

لتكن المعادلة التفاضلية (2) حيث $a_0, \ldots, a_n$ أعداد حقيقية ثابتة.
نبحث عن حلول لهذه المعادلة التفاضلية على الصيغة التالية: $y = e^{rx}$، حيث r عدد ثابت.
تكون الدالة $y = e^{rx}$ حلا للمعادلة التفاضلية (2) إلا و إذا كان

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

هذه المعادلة تسمى المعادلة المميزة للمعادلة (2).
في ما يلي، ندرس المعادلات الخطية من الرتبة 2 ذات المعاملات الثابتة.

$$y'' + ay' + by = 0$$

المعادلة المميزة $r^2 + ar + b = 0$، و لنا ثلاث حالات:

1. إذا كان $\Delta = a^2 - 4b > 0$، أي أن المعادلة المميزة لها جذرين مختلفين و حقيقيين r_1 و r_2.
   $\{e^{r_1 x}, e^{r_1 x}\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة.
2. إذا كان $\Delta = 0$، المعادلة المميزة لها حل وحيد مكرر $r = -\frac{a}{2}$.
   في هذه الحالة $\{e^{rx}, xe^{rx}\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة.
3. إذا كان $\Delta < 0$، فإن المعادلة المميزة لها حلين مختلفين كعددين مركبين r_1 و r_2.
   إذا كان $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ و $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$، فإن
   $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)\}$ يمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة.

أمثلة

1. بالنسبة للمعادلة $y'' - 3y' + 2y = 0$، فإن $\{e^x, e^{2x}\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة.
2. بالنسبة للمعادلة $y'' + 4y' = 0$، فإن $\{1, e^{-4x}\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة.
3. بالنسبة للمعادلة $y'' + y' + y = 0$، فإن $\{e^{\frac{-x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x, e^{\frac{-x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة.
4. بالنسبة للمعادلة $y'' + 2y' + y = 0$، فإن $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة.

لتكن المعادلة التفاضلية

$$y'' + ay' + by = f(x). \tag{7}$$

نظرية

1 لتكن $\{y_1, y_2\}$ مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة المتجانسة.
لكل دالة قابلة للتفاضل y على الفترة I، توجد دالتين وحيدتين قابلتين للإشتقاق (U, V) على الفترة I حيث

$$\begin{cases} y = Uy_1 + Vy_2 \\ y' = Uy_1' + Vy_2' \end{cases} \tag{8}$$

نظرية

إذا كان y حلا للمعادلة التفاضلية ??، توجد دالتين وحيدتين قابلتين للإشتقاق (U, V) على I حيث 2

$$\begin{cases} U'y_1 + V'y_2 = 0 \\ U'y_1' + V'y_2' = f \end{cases}.$$

هذه الطريقة تسمى طريقة تغيير الثوابت.

البرهان

1. لكل $x \in I$، محدد مصفوفة النظام الخطي (8) $W(x) \neq 0$. إذًا يوجد حل وحيد للنظام التالي

$$U(x) = \frac{\begin{vmatrix} y(x) & y_2(x) \\ y'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)}, \quad V(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix}}{W(x)}.$$

2. إذا كان y حلا للمعادلة التفاضلية ??. توجد دالتين وحيدتين قابلتين للإشتقاق (U, V) على I وتحققان النظام (8). بعد الإشتقاق في المعادلة الأولى للنظام نحصل على:

$$U' y_1 + V' y_2 = 0. \tag{9}$$

بما أن y قابلة للإشتقاق مرتين، فإن

$$y" = Uy_1" + Vy_2" + U'y_1' + V'y_2'. \tag{10}$$

تكون y حلا للمعادلة التفاضلية ?? إلا و إذا كان

$$\begin{cases} U'y_1 + V'y_2 = 0 \\ U'y_1' + V'y_2' = f \end{cases}.$$

هذا النظام هو نظام كرامر و له حل وحيد. $y = Uy_1 + Vy_2$.
و بالتالي مجموع الحلول للمعادلة التفاضلية ?? هو المجموعة $\{y = Uy_1 + Vy_2,\}$
حيث U, V قابلتين للإشتقاق و تحقق النظام التالي:

$$\begin{cases} U'y_1 + V'y_2 = 0 \\ U'y_1' + V'y_2' = f \end{cases}.$$

أمثلة

1. لتكن المعادلة التفاضلية $y'' + y = \dfrac{1}{3+\cos(2x)}$.
الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة $y = a\cos x + b\sin x$.
باستعمال طريقة تغيير الثوابت $y = U\cos x + V\sin x$، نحصل على:

$$\begin{cases} U'\cos x + V'\sin x = 0 \\ -U'\sin x + V'\cos x = \frac{1}{3+\cos(2x)} \end{cases}.$$

إذاً،
$$U = -\frac{1}{2}\tan^{-1}(\cos x) + a,$$
$$V = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{|\sqrt{2}+\sin x|}{|\sqrt{2}-\sin x|}\right) + b.$$

2 لتكن المعادلة التفاضلية $y'' + 4y' + 5y = \cosh(2x)\cos x$. المعادلة المميزة للمجموعة $r^2 + 4r + 5 = (r+2+\mathrm{i})(r+2-\mathrm{i})$.
المجموعة $\{e^{-2x}\cos(2x), e^{-2x}\sin(2x)\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة المتجانسة.
باستعمال طريقة تغيير الثوابت، الحل العام للمعادلة يكون على الصيغة التالية:
$y = Ue^{-2x}\cos(x) + Ve^{-2x}\sin(x)$، حيث
$U' e^{-2x}\cos(x) + V' e^{-2x}\sin(x) = 0$ و
$U' e^{-2x}(-\sin(x) - 2\cos(x)) + V' e^{-2x}(\cos(x) - 2\sin(x)) = \cosh(2x)\cos(x)$.
إذاً $U = -\frac{1}{8}\cos(2x) + \frac{1}{20}e^{4x}\sin(2x) - \frac{1}{40}e^{4x}\cos(2x) + a$ و
$V = \frac{1}{40}e^{4x}\sin(2x) + \frac{1}{20}e^{4x}\cos(2x) + \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\sin(2x) + \frac{1}{16}e^{4x} + b$.

حالات خاصة

1. إذا كانت الدالة f كثيرة حدود بدرجة n. نبحث عن حل خاص للمعادلة التفاضلية (7) ككثيرة حدود.
   - إذا كان $b \neq 0$، يوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية (7) ككثيرة حدود بدرجة n.
   - إذا كان $b = 0$، $a \neq 0$، يوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية (7) ككثيرة حدود بدرجة $n+1$.
   - إذا كان $b = a = 0$، يوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية (7) ككثيرة حدود بدرجة $(n+2)$.

2. إذا كانت $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$، حيث P كثيرة حدود بدرجة n. نقوم بالتغيير التالي: $y = e^{\alpha x}z$.
$y' = \alpha e^{\alpha x}z + e^{\alpha x}z'$، $y" = \alpha^2 y + 2\alpha e^{\alpha x}z' + e^{\alpha x}z"$.

$$\begin{aligned} y" + ay' + by = e^{\alpha x}P(x) &= e^{\alpha x}(\alpha^2 z + 2\alpha z' + z" + a\alpha z + az' + bz) \\ &= e^{\alpha x}(z" + z'(a + 2\alpha) + z(\alpha^2 + a\alpha + b)). \end{aligned}$$

إذًا z يحقق المعادلة التفاضلية التالية

$$z'' + z'(a+2\alpha) + z(\alpha^2 + a\alpha + b) = P(x).$$

- إذا كان α حلا للمعادلة المميزة، توجد كثيرة حدود Q بدرجة n حيث تكون $e^{\alpha x}Q$ حلا للمعادلة التفاضلية.
- إذا كان $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ و $a + 2\alpha \neq 0$، (يعني أن α حل بسيط للمعادلة المميزة (تعدد جبري 1)).
في هذه الحالة توجد كثيرة حدود Q بدرجة $n+1$ حيث تكون $e^{\alpha x}Q$ حلا للمعادلة التفاضلية.
- إذا كان $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ و $a + 2\alpha = 0$، (يعني أن α حل للمعادلة المميزة بتعدد جبري 2).
في هذه الحالة توجد كثيرة حدود Q بدرجة $n+2$ حيث تكون $e^{\alpha x}Q$ حلا للمعادلة التفاضلية.

معادلة كوشي أولار المتجانسة

معادلة كوشي أولار المتجانسة برتبة 2 هي معادلة تفاضلية على الصيغة التالية:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \tag{11}$$

حيث a, b أعداد حقيقية. يمكن تغيير هذه المعادلة التفاضلية بطريقتين إلى معادلة تفاضلية خطية متجانسة.

الطريقة الأولى تكون باستعمال التغيير التالي: $x = e^t$.

لتكن $z(t) = y(e^t) = y(x)$.

$z' = e^t y'(e^t) = xy'$ و $z'' = z' + x^2y''(x)$. إذاً $ax^2y'' + bxy' + cy = a(z'' - z') + bz' + cz = az'' + (b-a)z' + cz$. و بذلك تصبح المعادلة التفاضلية معادلة تفاضلية خطية

$$az'' + (b-a)z' + cz = 0.$$

الطريقة الثانية تكون بالبحث عن حل خاص على الصيغة $y = x^r$.
باستعمال هذا التغيير في المعادلة، نجد: $x^r\left(ar(r-1)+br+c\right)=0$، حيث $x \neq 0$، و نحصل على $ar(r-1)+br+c=0$.

أمثلة

1. لتكن معادلة كوشي أولار التالية: $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0.$ المعادلة التفاضلية التي تحققها z هي: $z'' + 2z' - 3z = 0.$ إذاً $z = ae^t + be^{-3t}$ و $y = ax + bx^{-3}$.
باستعمال الطريقة الثانية نحصل على: $r^2 + 2r - 3 = 0$، إذاً $r = 1$ أو $r = -3$ و $y = ax + bx^{-3}$.
2. لتكن معادلة كوشي أولار التالية: $x^2y'' - 3xy' + 7y = 0.$ المعادلة التفاضلية التي تحققها z هي: $z'' - 4z' + 7z = 0.$ إذاً
$z = ae^{2t}\cos(\sqrt{3}t) + be^{2t}\sin(\sqrt{3}t)$ و
$y = ax^2\cos(\sqrt{3}\ln x) + bx^2\sin(\sqrt{3}\ln x)$.
باستعمال الطريقة الثانية نحصل على: $r^2 - 4r + 7 = 0$، إذاً $r = 2 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$ و
$y = ax^2\cos(\sqrt{3}\ln x) + bx^2\sin(\sqrt{3}\ln x)$.

معادلة كوشي أولار الغير متجانسة

معادلة كوشي أولار الغير متجانسة تكون على الصيغة التالية:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = f. \tag{12}$$

لايجاد حلول هذه المعادلةن نبحث عن مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة المتجانسة و نستعمل طريقة تغيير الثوابت.

مثال

لتكن معادلة كوشي أولار التالية: $x^2y'' + 3xy' - 3y = e^x$.
$\{y_1 = x, y_2 = x^{-3}\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول للمعادلة المتجانسة. و باستعمال طريقة تغيير الثوابت $y = Ux + Vx^{-3}$، نحصل على $U = \frac{1}{4}e^x$، $V' = -\frac{1}{4}x^4e^x$ و $V = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)$. إذاً
$y = ax + bx^{-3} + e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)x^{-3}$.

أثر المؤثر التفاضلي على الدوال الأولية

1. الدالة الأسية :

$$De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}, \quad D^n e^{\lambda x} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

في هذه الحالة نقول إن الدالة $e^{\lambda x}$ دالة مميزة للمؤثر التفاضلي D بالنسبة للقيمة المميزة λ.

2. الدوال المثلثية

$$D^2 \sin(\lambda x) = -\lambda^2 \sin(\lambda x), \qquad D^2 \cos(\lambda x) = -\lambda^2 \cos(\lambda x).$$

نقول إن الدوال $\sin(\lambda x)$ و $\cos(\lambda x)$ دوال مميزة للمؤثر التفاضلي D^2 بالنسبة للقيمة المميزة $-\lambda^2$.

3 الدوال x^k

$$D^n x^k = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n},$$

حيث $k \in \mathbb{N}$. و كحالة خاصة $D^n x^k = 0$ لكل $k < n$.

كثيرات حدود للمؤثر التفاضلي D

تعريف

لتكن $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ كثيرة حدود درجتها n، حيث a_0، a_1، $\cdots$، a_n أعداد حقيقية. إذاً نقول إن المؤثر التفاضلي

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_1 D + \cdots + a_0$$

كثيرة حدود للمؤثر التفاضلي D و درجته n.

نظرية

إذا كان $P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_1 D + \cdots + a_0$، فإن

1. $P(D)\, e^{\lambda x} = P(\lambda)\, e^{\lambda x}$
2. $P(D^2) \sin(\lambda x) = P(-\lambda^2) \sin(\lambda x)$ و $P(D^2) \cos(\lambda x) = P(-\lambda^2) \cos(\lambda x)$

نثبت هذا النظرية باستعمال الإستقراء الرياضي.

نظرية

إذا كان $P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_1 D + \cdots + a_0$ و إذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل من الدرجة n على $\mathbb{R}$، فإن

1. $$D^n\left(e^{\lambda x} f(x)\right) = e^{\lambda x}(D+\lambda)^n f(x).$$
2. $$P(D)\left(e^{\lambda x} f(x)\right) = e^{\lambda x} P(D+\lambda) f(x).$$

البرهان
نثبت النظرية باستعمال الإستقراء الرياضي.
إذا كان $n=1$:

$$\begin{aligned} D\left(e^{\lambda x}f(x)\right) &= \lambda e^{\lambda x}f(x)+e^{\lambda x}f'(x) \\ &= e^{\lambda x}(Df(x)+\lambda) \\ &= e^{\lambda x}(D+\lambda)f(x). \end{aligned}$$

نفرض أن النتيجة صحيحة إلى الحد n. إذاً

$$\begin{aligned} D^{n+1}\left(e^{\lambda x}f(x)\right) &= D\left(D^n\left(e^{\lambda x}f(x)\right)\right) \\ &= D\left(e^{\lambda x}(D+\lambda)^n f(x)\right) \\ &= e^{\lambda x}(D+\lambda)((D+\lambda)^n f(x)) \\ &= e^{\lambda x}(D+\lambda)^{n+1} f(x) \end{aligned}$$

نستنتج النتيجة (2) من النتيجة (1):

تعريف

نفسر النظرية السابقة على النحو التالي:

$$(D+\lambda)^n = e^{-\lambda x} D^n e^{\lambda x}.$$

الدالة $e^{\lambda x}$ و الدالة $e^{-\lambda x}$ وقع النظر إليهما كمؤثرين تفاضلين.

تعريف

ليكن $P(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0$ كثيرة حدود للمؤثر التفاضلي D من الدرجته n.
و نوات هذا المؤثر الخطي $P(D)$ هي مجموع الحلول للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n: $P(D)y = 0$.

نظرية

1 إذا كان $P(D)=(D-r_1)(D-r_2)\dots(D-r_n)$ حيث $r_1,\dots,r_n$ مختلفة، فإن نواة المؤثر الخطي $P(D)$ هو الفضاء الخطي المولد بالدوال $\{e^{r_1x},\dots,e^{r_nx}\}$.

2 إذا كان

$$P(D)=(D-r_1)^{n_1}(D-r_2)^{n_2}\cdots(D-r_k)^{n_k}=\prod_{j=1}^{k}(D-r_j)^{n_j},$$

حيث $r_1,\dots,r_k$ مختلفة و $\sum_{j=1}^{k}n_j=n$، فإن نواة المؤثر الخطي $P(D)$ هو الفضاء الخطي

نظرية

$$\oplus_{j=1}^{k} \mathrm{Vect}\left(e^{r_j x}, x e^{r_j x}, \ldots, x^{n_j-1} e^{r_j x}\right),$$

حيث $\mathrm{Vect}\left(e^{r_j x}, x e^{r_j x}, \ldots, x^{n_j-1} e^{r_j x}\right)$ هو الفضاء الخطي المولد بالدوال $\}\left(e^{r_j x}, x e^{r_j x}, \ldots, x^{n_j-1} e^{r_j x}\right)$.

إذا كان 3

$P(D) = \left((D-\lambda_1)^2 + \beta_1^2\right) \ldots \left((D-\lambda_m)^2 + \beta_m^2\right) = \prod_{j=1}^{m} \left((D-\lambda_j)^2 + \beta_j^2\right)$،

حيث $n = 2m$ و $\lambda_j \neq \lambda_k$ أو $\beta_j \neq \beta_k$ لكل $j \neq k$، $j, k = 1, \ldots, m,$
فإن نواة المؤثر الخطي $P(D)$ هو الفضاء الخطي المولد بالدوال
$\left(e^{\lambda_1 x} \sin(\beta_1 x), e^{\lambda_1 x} \cos(\beta_1 x), \ldots, e^{\lambda_m x} \sin(\beta_m x), e^{\lambda_m x} \cos(\beta_m x)\right)$.

نظرية

إذا كان 4

$$P(D)=\left((D-\lambda_1)^2+\beta_1^2\right)^{n_1}\ldots\left((D-\lambda_m)^2+\beta_m^2\right)^{n_m}=\prod_{j=1}^{m}\left((D-\lambda_j)^2+\beta_j^2\right)^{n_j},$$

حيث $n=\sum_{j=1}^{m}n_j$ و $\lambda_j\neq\lambda_k$ أو $\beta_j\neq\beta_k$ لكل $j\neq k$، $j,k=1,\ldots,m,$
فإن نواة المؤثر الخطي $P(D)$ هو الفضاء الخطي

$$\oplus_{j=1}^{m}\mathrm{Vect}\left(e^{\lambda_j x}\sin(\beta_j x),e^{\lambda_j x}\cos(\beta_j x),\ldots,x^{n_j-1}e^{\lambda_j x}\sin(\beta_j x),x^{n_j-1}e^{\lambda_j x}\cos(\beta_j x)\right).$$

معكوس المؤثر التفاضلي

تعريف

لتكن $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة. باستعمال المبرهنة الأساسية للتحليل، نحصل على:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = D\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

معكوس المؤثر التفاضلي D^{-1} للمؤثر التفاضلي D يمكن تعريفه كما يلي::

$$D^{-1}f(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

كذلك نعرف باستعمال الإستقراء الرياضي معكوس المؤثر التفاضلي D^n،

$$D^{-n}f(x) = D^{-n+1}(D^{-1}f(x)).$$

أمثلة

1. $D^{-1}x^r = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c,$
$D^{-2}x^r = \frac{x^{r+2}}{(r+1)(r+2)} + a_1 x + a_2,$
$D^{-n}x^r = \frac{x^{r+n}}{(r+1)\dots(r+n)} + P_{n-1}(x),$ حيث P_{n-1} كثيرة حدود بدرجته أقل أو يساوي $n-1$.

2. ليكن $\lambda \neq 0$،
$D^{-1}e^{\lambda x} = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} + c,$
$D^{-n}e^{\lambda x} = \frac{1}{\lambda^n}e^{\lambda x} + P_{n-1}(x),$ حيث P_{n-1} كثيرة حدود بدرجته أقل أو يساوي $n-1$.

3. ليكن $\lambda \neq 0$،
$D^{-1}\cos(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x) + c = \frac{1}{\lambda}\cos(\lambda x - \frac{\pi}{2}) + c,$
$D^{-n}\cos(\lambda x) = \frac{1}{\lambda^n}\cos(\lambda x - \frac{n\pi}{2}) + P_{n-1}(x),$ حيث P_{n-1} كثيرة حدود بدرجته أقل أو يساوي $n-1$.

الشكل العام للمعادلات التفاضلية الخطيةالغير متجانسة ذات المعاملات الثابتة تأخذ الشكل التالي:

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0) y = P_n(D) y = f.$$

نريد استعمال المؤثر التفاضلي لإيجاد حل خاص لهذه المعادلات.

نظرية

1 إذا كان $P(\lambda) \neq 0$، فإن

$$y(x) = \frac{1}{P(\lambda)} e^{\lambda x}$$

حل خاص للمعادلة التفاضلية.

2 إذا كان $P(D) = (D-\lambda)^m Q(D)$، $1 \leq m \leq n$ مع $Q(\lambda) \neq 0$، فإن

$$y = \frac{1}{Q(\lambda)} \left(\frac{1}{m!} x^m + P_{m-1}(x) \right) e^{\lambda x}$$

حل خاص للمعادلة التفاضلية، حيث P_{m-1} كثيرة حدود درجتها أقل أو يساوي $m-1$.

البرهان

$$P(D)\,e^{\lambda x}=P(\lambda)\,e^{\lambda x}.$$

1. إذا كان $P(\lambda)\neq 0$، فإن

$$\frac{1}{P(\lambda)}\left[P(D)\left(e^{\lambda x}\right)\right]=P(D)\left(\frac{e^{\lambda x}}{P(\lambda)}\right)=e^{\lambda x}.$$

إذاً $y=\frac{1}{P(\lambda)}\,e^{\lambda x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية.

2. إذا كان $P(D)=(D-\lambda)^m Q(D)$، $1\leq m\leq n$ و $Q(\lambda)\neq 0$، فإن المعادلة تصبح على الشكل $P(D)y=Q(D)(D-\lambda)^m y=e^{\lambda x}$. إذاً $y=\frac{1}{Q(\lambda)}(\frac{1}{m!}x^m+P_{m-1}(x))\,e^{\lambda x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية، حيث P_{m-1} كثيرة حدود درجتها أقل أو يساوي $m-1$. لأن

$$
\begin{aligned}
(D-\lambda)^m Q(D)\left[\left(\frac{1}{m!}x^m+P_{m-1}\right)e^{\lambda x}\right] &= Q(\lambda)(D-\lambda)^m\left(e^{\lambda x}\frac{1}{m!}x^m\right)\\
&= Q(\lambda)\,e^{\lambda x}D^m\left(\frac{1}{m!}x^m\right)\\
&= Q(\lambda)\,e^{\lambda x}
\end{aligned}
$$

مثال

1. حل خاص للمعادلة التفاضلية

$$y'' - 2y' + 6y = e^{3x}.$$

$$y_p = \frac{e^{3x}}{3^2 - 2\cdot 3 + 8} = \frac{1}{11}e^{3x}.$$

2. حل خاص للمعادلة التفاضلية

$$(D-1)^3(D+2)(D-2)y(x) = e^x.$$

is

$$y_p = \frac{e^x}{(1+2)(1-2)}\left(\frac{1}{3!}x^3\right) = -\frac{x^3}{18}e^x.$$