تحويلات لابلاص Laplace Transformations

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

17 مارس 2020

المحتويات

تعريف

1 لتكن f دالة معرفة على الفترة $[a, b]$. نقول إن الدالة f متصلة قطعة قطعة إذا وجد تجزيء $a_1 = a < \ldots < a_n = b$ للفترة $[a, b]$ بحيث تكون الدالة f متصلة على الفترات (a_j, a_{j+1})، لكل $j = 1, \ldots n-1$ و $\lim\limits_{x \to a^+} = f(a^+)$ ، $\lim\limits_{x \to b^-} = f(b^-)$ ، $\lim\limits_{x \to a_j^-} = f(a_j^-)$ و $\lim\limits_{x \to a_j^+} = f(a_j^+)$ موجودة و محدودة لكل $j = 2, \ldots n-1$.

2 لتكن f الدالة المعرفة على الفترة $[0, +\infty)$.
نقول إن الدالة f متصلة قطعة قطعة إذا كانت الدالة f متصلة قطعة قطعة على كل فترة $[a, b] \subset [0, +\infty)$.

تعريف

لتكن f دالة متصلة قطعة قطعة على الفترة $[0, +\infty)$.
تحويل لابلاص للدالة f هي الدالة $F = \mathcal{L}(f)$ المعرفة على بما يلي:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx = \lim_{N \to +\infty} \int_0^N e^{-sx} f(x)\, dx.$$

تعريف

نقول إن دالة f ذات رتبة أسية إذا وجدت أعداد ثابتة $c, M > 0$ و $T \geq 0$ بحيث $|f(x)| \leq Me^{cx}$ لكل $x \geq T$.

مبرهنة

(شروط كافية لوجود تحويل لابلاص $(\mathcal{L}(f(t))$)
إذا كانت f دالة متصلة قطعة قطعة على الفترة $[0, +\infty)$ و ذات رتبة أسية c، فإن لكل $s > c$ و $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ معرفة.

مبرهنة

إذا كانت f دالة متصلة قطعة قطعة على الفترة $[0, +\infty)$ و ذات رتبة أسية، فإن $\lim_{s \to +\infty} F(s) = 0$ ، حيث $F(s) = \mathcal{L}(f(x))$.

الخصائص الأساسية لتحويل لابلاص

مبرهنة

$$\mathcal{L}\left(af(x)+bf(x)\right)=a\mathcal{L}\left(f(x)\right)+b\mathcal{L}\left(g(x)\right)$$ 1

$$\mathcal{L}\left(e^{ax}(f(x)\right)(s)=\mathcal{L}\left(f(x)\right)(s-a)$$ 2

$$\mathcal{L}\left(f(bx)\right)(s)=\frac{1}{b}\mathcal{L}\left(f(x)\right)(\frac{s}{b})$$ 3

مبرهنة

تحويل لابلاص للدوال الأساسية

1. $\mathcal{L}(1) = \dfrac{1}{s}$.
2. $\mathcal{L}(x^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$
3. $\mathcal{L}(e^{ax}) = \dfrac{1}{s-a}$, $n \in \mathbb{N}$
4. $\mathcal{L}\left(e^{\mathrm{i}x}\right) = \dfrac{1}{s-\mathrm{i}}$
5. $\mathcal{L}(\sin(ax)) = \dfrac{a}{s^2+a^2}$
6. $\mathcal{L}(\cos(ax)) = \dfrac{s}{s^2+a^2}$
7. $\mathcal{L}(\sinh(ax)) = \dfrac{a}{s^2-a^2}$
8. $\mathcal{L}(\cosh(ax)) = \dfrac{s}{s^2-a^2}$

نتيجة

$$\mathcal{L}\left(e^{ax}\sin(bx)\right) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad (1)$$

$$\mathcal{L}\left(e^{ax}\cos(bx)\right) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}. \quad (2)$$

مبرهنة

$$\mathcal{L}\left(x^n f(x)\right)(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\left(f(x)\right)(s).$$

نثبت المعدلة باستعمال التكامل بالتجزيء إذا كانت $n = 1$ و الحالة العامة نثبتها باستعمال الإستقراء الرياضي.

أمثلة

1. إذا كانت $f = 1$

$$\mathcal{L}\left(x^n\right)(s) = -\frac{d^n}{ds^n}\frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

2. إذا كانت $f(x) = \sin(x)$ أو $f(x) = \cos(x)$، نحصل على

$$\mathcal{L}\left(x\sin(bx)\right)(s) = -\frac{d}{ds}\frac{b}{s^2+b^2} = \frac{2bs}{(s^2+b^2)^2},$$

$$\mathcal{L}\left(x\cos(bx)\right)(s) = -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+b^2} = \frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2} = \frac{1}{s^2+b^2} - \frac{2b^2}{(s^2+b^2)^2}.$$

مبرهنة

إذا كانت $f \in \mathcal{C}^{n-1}$ على الفترة $[0,+\infty)$ و $f^{(k)}$ ذات رتبة أسية و إذا كانت $f^{(n)}$ دالة متصلة قطعة قطعة على الفترة $[0,+\infty)$، فإن

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(x)) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

حيث $F(s) = \mathcal{L}(f(x))$

إذا كانت $n = 1$ فنحصل على النتيجة باستعمال التكامل بالتجزيء:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(f'(x)\right)(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} f'(x)\,dx \\
&= e^{-sx} f(x)\Big]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx \\
&= s\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx - f(0).
\end{aligned}$$

في الحالة العامة نثبت النتيجة باستعمال الإستقراء الرياضي

مثال

إذا كانت $f(x) = \sin x$، فإن $f'' + f = 0$ و بالتالي فإن
$\mathcal{L}\left(f''(x) - f(x)\right)(s) = s^2\mathcal{L}\left(f(x)\right)(s) - 1 - \mathcal{L}\left(f(x)\right)(s)$.
إذاً $\mathcal{L}\left(\sin x\right)(s) = \dfrac{1}{1+s^2}$.

نتيجة

إذا كانت f دالة متصلة و ذات رتبة أسية، فإن

$$\int_0^x f(t)\,dt = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}F(s)\right)$$

حيث $F = \mathcal{L}(f)$.

البرهان

لتكن الدالة $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. بما أن $\mathcal{L}(g')(s) = s\mathcal{L}(g) - g(0)$، فإن

$$\mathcal{L}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{s}F(s).$$

مثال

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = \int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x.$$

مبرهنة

إذا كانت f و g دالتين متصلتتين و $\mathcal{L}\left(f(x)\right) = \mathcal{L}\left(g(x)\right)$، فإن $f = g$.
(هذا يعني أن تحويل لابلاص دالة حطية آحادية).

تعريف

إذا كانت F تحويل لابلاص لدالة متصلة f، فإن الدالة f هي التحويل العكسي للدالة F و نرمز بها:

$$F = \mathcal{L}^{-1}(f) .$$

مثال

$\mathcal{L}(\sin x) = \frac{1}{s^2+1},\ \mathcal{L}(\cos x) = \frac{s}{s^2+1}$ و بالتالي فإن

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = -\frac{2s}{(s^2+1)^2} = -\mathcal{L}(x\sin x).$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{1}{2}x\sin(x).$$

كذالك $-\mathcal{L}(x\cos x) = \frac{1}{(s^2+1)^2} - \frac{2s}{(s^2+1)^2} = \frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+1}$.

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right) = x\sin(x) - x\cos(x).$$

مبرهنة

1. $$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}) = 1$$
2. $$n \in \mathbb{N}\ ,\mathcal{L}^{-1}(\frac{n!}{s^{n+1}}) = x^n$$
3. $$n \in \mathbb{N}\ ,\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s-k}) = e^{kx}$$
4. $$\mathcal{L}^{-1}(\frac{k}{s^2+k^2}) = \sin(kx)$$
5. $$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+k^2}) = \cos(kx)$$
6. $$\mathcal{L}^{-1}(\frac{k}{s^2-k^2}) = \sinh(kx)$$
7. $$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2-k^2}) = \cosh(kx)$$

مثال

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right)$$

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = -\frac{16}{5}\frac{1}{s-1} + \frac{25}{6}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{30}\frac{1}{s+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right) = -\frac{16}{5}e^{x} + \frac{25}{6}e^{2x} + \frac{1}{30}e^{-4x}$$

ملاحظة

لتكن المعادلة التفاضلية

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = g(x)$$

حيث $y(0) = y_0, y^{'}(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$ حيث a_j, y_j أعداد ثابتة، لكل $0 \leq j \leq n-1$. باستعمال تحويل لابلاص نحصل على:

$$a_n \mathcal{L}(y^{(n)}) + a_{n-1} \mathcal{L}(y^{(n-1)}) + \ldots + a_0 \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(g(x))$$

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية

$$y' + 3y = 13\sin(2x), \quad y(0) = 6.$$

باستعمال تحويل لابلاص نحصل على:

إذًا $\mathcal{L}(y') + 3\mathcal{L}(y) = 13\mathcal{L}(\sin(2x))$

و بالتالي فإن $sF(s) - 6 + 3F(s) = 6 + \dfrac{26}{s^2+4}$

و $F(s) = \dfrac{6}{s+3} + \dfrac{26}{(s+3)(s^2+4)} = \dfrac{8}{s+3} + \dfrac{-2s+6}{s^2+4}$

$$\begin{aligned} y &= 6\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + 6\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) \\ &= 8e^{-3x} - 2\cos(2t) + 3\sin(2x) \end{aligned}$$

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية

$$y^{''} - 3y' + 2y = e^{-4x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 5$$

باستعمال تحويل لابلاص نحصل على:

$$\mathcal{L}(y^{''}) - 3\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^{-4x})$$

إذاً $F(s) = \dfrac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4}$ و

$$y = -\frac{16}{5}e^{x} + \frac{25}{5}e^{2x} + \frac{1}{30}e^{-4x}$$

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية

$$y'' + y' + y = \sin(x), \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -1.$$

ليكن $Y(s) = \mathcal{L}\left(y(x)\right)$ ، و بالتالي

$$\mathcal{L}\left(y'\right) = s\,Y(s) - y(0) = s\,Y(s) - 1,$$
$$\mathcal{L}\left(y''\right) = s^2\,Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2\,Y(s) - s + 1.$$

باستعمال تحويل لابلاص نحصل على:

$$\left(s^2 + s + 1\right)Y(s) - s = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

إذاً

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1} + \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s^2 + 1)}.$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+s+1}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+s+1)(s^2+1)}\right). \end{aligned}$$

بما أن

$$\frac{s}{s^2+s+1}=\frac{s}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

فإن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+s+1}\right)=e^{-\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

باستعمال الكسور الجزئية:

$$\frac{1}{(s^2+s+1)(s^2+1)} = \frac{s+1}{s^2+s+1} - \frac{s}{s^2+1}.$$

إذاً

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+s+1)(s^2+1)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right) \\ &\quad -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\end{aligned}$$

بما أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \cos(x)$$

نحصل على

$$y(x) = 2e^{-\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) - \cos(x).$$

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية

$$y'' - 6y' + 9y = x^2 e^{3x}, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 17.$$

$\mathcal{L}(x^2) = \frac{2}{s^3}$، و بالتالي فإن $\mathcal{L}(x^2 e^{3x}) = \dfrac{2}{(s-3)^3}$.

باستعمال تحويل لابلاص نحصل على: $Y(s) = \dfrac{2s+5}{(s-3)^2} + \dfrac{2}{(s-3)^5}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+5}{(s-3)^3}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2(s-3)+11}{(s-3)^3}\right) \\
&= 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)^2}\right) + 11\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)^3}\right) \\
&= 2xe^{3x} + \frac{11}{2}x^2 e^{3x}
\end{aligned}$$

إذاً $y = 2xe^{3x} + \dfrac{11}{2}x^2 e^{3x} + \dfrac{1}{12}x^4 e^{3x}$

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية

$$y'' + y' + y = \sin(x), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$$

إذا كان $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}$ ، فإن

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1,$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - s + 1$$

باستعمال تحويل لابلاص نحصل على: $(s^2+s+1)\,Y(s) - s = \frac{1}{s^2+1}$، و

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+s+1} + \frac{1}{(s^2+s+1)(s^2+1)}.$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+s+1)(s^2+1)}\right\}.$$

بما أن

$$\begin{aligned}\frac{s}{s^2+s+1} &= \frac{s}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}\\ &= \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2}\\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2}\end{aligned}$$

نحصل على

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+s+1}\right\} = e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ x) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ x).$$

باستعمال الكسور الجزئية

$$\frac{1}{(s^2+s+1)(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}.$$

نحصل على: $A = B = 1$، $C = -1$، $D = 0$، و بالتالي:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+s+1)(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s+1}\right\} \\ &\quad -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}.\end{aligned}$$

بما أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s+1}\right\} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}x} \sin(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,x), \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos(x)$$

نحصل على:

$$y(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ x) - \cos(x).$$

مثال

من المعلوم و أن معادلة تفاضلية من الرتبة العالية يمكن تحويلها لنظام من المعادلات التفاضلية.
ليكن النظام التالي من المعادلات التفاضلية

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -2x + y \\ \frac{dy}{dt} &= x - 2y \end{cases}$$

، حيث $x(0) = 1$، $y(0) = 2$.

باستعمال تحويل لابلاص نحصل على:

$$\begin{cases} sX(s) - 1 &= -2X(s) + Y(s), \\ s\,Y(s) - 2 &= X(s) - 2\,Y(s), \end{cases}$$

حيث $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$، $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. نحصل على:

$$X(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+3}, \quad Y(s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+3}.$$

$$\frac{s+4}{(s+1)(s+3)} = \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+3}, \quad \frac{2s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+3}.$$

باستعمال تحويل لابلاص العكسي نحصل على:

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}, \quad y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

مثال

ليكن النظام التالي:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & -x+2y, \\ \dfrac{dy}{dt} & = & 2x+y \end{cases}$$

حيث $x(0)=1$ ، $y(0)=-1$.
باستعمال تحويل لابلاص

$$\begin{aligned} sX(s)-1 &= -X(s)+2Y(s), \\ sY(s)+1 &= 2X(s)+Y(s), \end{aligned}$$

حيث $X(s)=\mathcal{L}\,(x(t))$ ، $Y(s)=\mathcal{L}\,(y(t))$.
نبحث لحلول النظام بالنسبة للدوال $X(s)$ ، $Y(s)$ ،

$$X(s)=\frac{s-3}{s^2-5}=\frac{a}{s-\sqrt{5}}+\frac{b}{s+\sqrt{5}},$$

$$Y(s)=\frac{1-s}{s^2-5}==\frac{c}{s-\sqrt{5}}+\frac{d}{s+\sqrt{5}},$$

حيث $a=\frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}},\ b=\frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}},\ c=\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},\ d=-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

باستعمال تحويل لابلاص العكسي نحصل على:

$$x(t)=ae^{\sqrt{5}t}+be^{-\sqrt{5}t},\quad y(t)=ce^{\sqrt{5}t}+de^{-\sqrt{5}t}.$$

مثال

ليكن النظام التالي:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= -2x+y, \\ \dfrac{dy}{dt} &= x-2y \end{cases}$$

حيث $x(0)=1$, $y(0)=2$.
باستعمال تحويل لابلاص نحصل على:

$$\begin{aligned} sX(s)-1 &= -2X(s)+Y(s), \\ sY(s)-2 &= X(s)-2Y(s), \end{aligned}$$

حيث $X(s)=\mathcal{L}(x(t))$, $Y(s)=\mathcal{L}(y(t))$.
نبحث لحلول النظام بالنسبة للدوال $X(s)$, $Y(s)$

$$X(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+3}, \quad Y(s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+3}.$$

بما أن

$$\frac{s+4}{(s+1)(s+3)} = \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+3},$$
$$\frac{2s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+3},$$

باستعمال تحويل لابلاص العكسي نحصل على:

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}, \quad y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية $y'' + a^2 y = 1$، حيث $y(0) = 0, y'(0) = 0$.
باستعمال تحويل لابلاص، نحصل $s^2 F(s) + a^2 F(s) = F(s) = \frac{1}{s}$. إذاً $F(s) =$
$\frac{1}{s^2 + a^2} \frac{1}{s}$. باستعمال عكس تحويل لابلاص، نحصل $F(s)$

$$y(x) = \frac{1 - \cos(ax)}{a^2}.$$

تعريف

نعرف الدالة H على الفترة $(0,+\infty)$
$H(x-a)=\begin{cases}0 & 0\leq x\leq a\\ 1 & x\geq a\end{cases}$.

إذا كانت $f(x)=\sin x$ لكل $x\geq\pi$ و 0 إذا كان $x<\pi$، فإن
$f(x)=H(x-\pi)\sin x$.
كذلك إذا كانت الدالة $f(x)=e^x$ لكل $x\in[1,2)$، و 0 فيما سوى ذلك، فإن.
$f(x)=e^x\left(H(x-1)-H(x-2)\right)$،

مبرهنة

إذا كانت $F(s) = \mathcal{L}(f(x))$ و $a \geq 0$، فإن

$$\mathcal{L}(f(x-a)H(x-a)) = e^{-as}F(s).$$

البرهان

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(x-a)H(x-a)) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} f((x-a)H(x-a))\,dx \\
&= \int_a^{+\infty} e^{-sx} f(x-a)\,dx \\
&= e^{-as}\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,dx = e^{-as}F(s).
\end{aligned}$$

مثال

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-bs}}{s+a}\right) = e^{-a(x-b)}H(x-b),$$

$$\mathcal{L}\left(H(x-a)\right) = \frac{e^{-as}}{s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+a}{(s+a)^2+1}e^{-bs}\right) = e^{-a(x-b)}\cos(x-b)H(x-b)$$

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية التالية: $y' - 2y = f(x)$، حيث
$y(0) = 3$ و $f(x) = 3\cos x$ إذا كان $x \geq 1$ و $f(x) = 0$ إذا كان $0 < x \leq 1$.
$f(x) = 3\cos x H(x-1)$
إذاً، $\mathcal{L}\left(f(x)\right) = \frac{3(s+1)}{(s+1)^2+1}e^{-s}$.

$$(s-2)\,Y(s) - 3 = \frac{3(s+1)}{(s+1)^2+1}e^{-s}$$

و

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3}{s-2}\left(1 + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}e^{-s}\right) \\ &= \frac{3}{s-2} + \frac{9}{10}\frac{1}{s-2}e^{-s} - \frac{9}{10}\frac{s+1}{(s+1)^2+1}e^{-s} \\ &\quad + \frac{1}{10}\frac{1}{(s+1)^2+1}e^{-s} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s-2}\right) = 3e^{2x}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}e^{-s}\right) = e^{2(x-1)}H(x-1)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}e^{-s}\right) = e^{-(x-1)}\cos(x-1)H(x-1)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}e^{-s}\right) = e^{-(x-1)}\sin(x-1)H(x-1)$$

$$y(x) = 3e^{2x} + \left(\frac{9}{10}e^{2(x-1)} - \frac{9}{10}e^{1-x}\cos(x-1) + \frac{1}{10}e^{1-x}\sin(x-1)\right)H(x-1)$$

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية $y^{(4)}(x) = f(x)$ حيث $f(x) = b(1 - \frac{1}{a}x)$ لكل $0 \leq x \leq a$ و $f(x) = 0$ لكل $a \leq x \leq 2a$، $y(0) = y'(0) = 0$ و $y(2a) = y'(2a) = 0$.

لتكن المعادلة التفاضلية

$$y''(x) + y(x) = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

حيث $f(x) = 1$ إذا كان $x \in [1, 2)$ و صفر في ما عدا ذلك.
الدالة $f(x) = H(x-1) - H(x-2)$. باستعمال تحويل لابلاص، نحصل على:

$$s^2 F(s) + F(s) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}.$$

و بالتالي فإن

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2+1)} - \frac{e^{-2s}}{s(s^2+1)}.$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = 1 - \cos x.$$

باستعمال تمهيدية (16) و المبرهنة (42)، نحصل على:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-s}\mathcal{L}(1-\cos x)\right)=(1-\cos(x-1))\,H(x-1)$$

كذلك

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s(s^2+1)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\mathcal{L}(1-\cos x)\right)=\big(1-\cos(x-2)\big)\,H(x-2)$$

و بالتالي فإن الحل

$$y(x)=\big(1-\cos(x-1)\big)\,H(x-1)-\big(1-\cos(x-2)\big)\,H(x-2).$$