نظرية كوشي المحلية

د. المنجي بلال

18 جويلية 2017

المحتويات

باب 1

نظرية كوشي المحلية

1.1 التكامل المركب

1.1.1 العمليات على المنحنيات

تعريف 1.1.1
لتكن Ω مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ و لتكن I فترة مغلقة في $\mathbb{R}$.

1. كل دالة متصلة $\gamma\colon I \longrightarrow \Omega$ تسمى منحنى في Ω.
2. كل دالة قابل للمفاضلة باتصال $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \Omega$ تسمى منحنى قابل للمفاضلة باتصال في Ω.
3. كل منحنى $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \Omega$ يسمى منحنى مغلق إذا كان $\gamma(a) = \gamma(b)$.
4. نقول أنّ منحنى $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \Omega$ قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة، إذا وجد تجزيء $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ للفترة $[a,b]$ بحيث إختصار γ على كل فترة $]t_j, t_{j+1}[$ يمكن تمديدها كدالة قابل للمفاضلة باتصال على $[t_j, t_{j+1}]$ لكل $j = 0, ..., n-1$.
5. إذا كان $\gamma\colon\ [a,b] \longrightarrow \Omega$ منحنى مغلق. نقول أنه بسيط أو جوردن (*Jordan*) إذا كان γ أحادي على الفترة (a,b). ($\gamma(a)$ يمكن أن يساوي $\gamma(b)$).

تعريف 1.1.2 (المنحنى المتقابل)
ليكن $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ منحنى. المنحنى المتقابل γ^- هو المنحنى المعرف كما يلي: $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$، لكل $t \in [a,b]$.
γ و γ^- لهما نفس الصورة ولكن لهما اتجاهين منعكسين.

تعريف 1.1.3 (تجاور منحنيين)
ليكن $\gamma_1\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ و $\gamma_2\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ منحنيين بحيث $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$.
المنحنى المتجاور للمنحنين γ_1 و γ_2 هو المنحنى $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ على الفترة $[a, b+d-c]$ المعرف بما يلي:

$$\begin{cases} \gamma(t) & = & \gamma_1(t) & \text{if} & t \in [a,b] \\ \gamma(t) & = & \gamma_2(t-b+c) & \text{if} & t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

تعريف 1.1.4 (المنحنيات المتكافئة)
ليكن I_1 و I_2 فترتين مغلقتين في $\mathbb{R}$.
نقول أن منحنين $\gamma_1\colon I_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ و $\gamma_2\colon I_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ متكافئين إذا وجدت دالة تزايدية و تقابل و قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة $h\colon : I_1 \longrightarrow I_2$ بحيث $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$.

1.1.2 التكامل المركب

تعريف 1.1.5 (تكامل على منحنى)
لتكن f دالة متصلة معرفة على صورة منحنى قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة γ.
تكامل الدالة f على المنحنى γ معرف بما يلي:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{1.1}$$

نظرية 1.1.1
ليكن γ_1 و γ_2 منحنيين قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة على الفترات $[a,b]$ و $[c,d]$ على التوالي.
إذا كان γ_1 و γ_2 منحنيين متكافئين، فإنّ
$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$، لكل دالة متصلة على صورة γ_1.

البرهان
لتكن $h : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ دالة تقابل و قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة بحيث $\gamma_2 \circ h = \gamma_1$.

$$\int_c^d f \circ \gamma_2(s)\gamma_2'(s)ds = \int_a^b f \circ \gamma_2 \circ h(t)\gamma_2'(h(t))h'(t)dt = \int_a^b f \circ \gamma_1(s)\gamma_1'(s)ds.$$

□

نظرية 1.1.2
ليكن γ منحنى قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة معرف على فترة $[a,b]$ مع γ^- هو المنحنى المعاكس، إذاً

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz.$$

البرهان
$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)dt = -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = -\int_{\gamma} f(z)dz$. □

نظرية 1.1.3
إذا كان γ_1 و γ_2 منحنيين قابلين للمفاضلة باتصال قطعة قطعة و متجاورين، إذاً

$$\int_{\gamma_1\vee\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

نتيجة 1.1.1
إذا كان γ منحنى مغلق قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة، إذاً التكامل $\int_{\gamma} f(z)dz$ غير متغير بمركز المنحنى.

1.1.3 طول المنحنى

تعريف 1.1.6
ليكن $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ منحنى قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة. طول المنحنى γ هو $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$.

نتيجة 1.1.1
نستنتج أنه إذا كانت دالة متصلة f على صورة منحنى γ، فإنّ

$$|\int_{\gamma} f(z)dz| \leq ML(\gamma), \qquad (1.2)$$

بحيث $M = \sup_{z\in \text{ range}(\gamma)} |f(z)| = \sup_{t\in[a,b]} |f\circ\gamma(t)|$.

أمثلة 1.1.1

1. ليكن $a \in \mathbb{C}$ و $r > 0$. المنحنى المغلق $\gamma \colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ المعرف بما يلي: $\gamma(\theta) = a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ يسمى الدائرة التي مركزها a و شعاعها r متجهة في الإتجاه الموجب.

$$\int_\gamma f(z)dz = \mathrm{i}r \int_0^{2\pi} f(a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} d\theta.$$

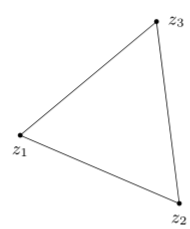
نلاحظ أنه إذا كان $f(z) = z^n$،

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

لكل $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

2. ليكن z_1 و z_2 عددين مركبين.
المنحنى γ المعرف بما يلي:
$\gamma(t) = tz_2 + (1-t)z_1$, $t \in [0, 1]$ يسمى الفترة $[z_1, z_2]$.
إذا كان $f(z) = z^n$، $\int_{[z_1,z_2]} f(z)dz = \dfrac{1}{n+1}(z_2^{n+1} - z_1^{n+1})$ لكل $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.
(في حالة $n \le -1$، نفترض أن $0 \notin \operatorname{Im}\Gamma$)

3. ليكن z_1, z_2 و z_3 أعداد مركبة مختلفة.



شكل 1.1:

ليكن Δ المثلث التي رؤوسه z_1, z_2 و z_3. و نرمز بـ $\partial\Delta$ حد المثلث Δ بالإتجاه الموجب.
نعرف هذا المنحنى المغلق $\gamma = \partial\Delta$ بمجاورة
الفترات $[z_2, z_3]$ $[z_1, z_2]$ و $[z_3, z_1]$.
هذا المنحنى $\gamma : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{C}$ معرف بما يلي:

$$\begin{cases} \gamma(t) &= tz_2 + (1-t)z_1 & 0 \le t \le 1 \\ \gamma(t) &= (t-1)z_3 + (2-t)z_2 & 1 \le t \le 2 \\ \gamma(t) &= (t-2)z_1 + (3-t)z_3 & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{[z_1,z_2]} f(z)dz + \int_{[z_2,z_3]} f(z)dz + \int_{[z_3,z_1]} f(z)dz.$$

نلاحظ أنه إذا كان $f(z) = z^n$، فإنّ $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$, لكل $n \in \mathbb{N}$ و كذلك $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$، لكل $n \in \mathbb{Z}$، $n \le -2$ و $0 \notin \partial\Delta$.

نتيجة 1.1.2

إذا كانت f دالة تحليلية على جوار Δ، فإنّ $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

(نقول أن مثلث Δ موجود في مفتوح Ω إذا كان حده و داخله موجود في Ω.)

1.1.4 عدد لف منحنى مغلق

مبرهنة 1.1.2 (عدد لف منحنى مغلق)

ليكن γ منحنى مغلق قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة في $\mathbb{C}$ و Ω مكمل صورة المنحنى γ في $\mathbb{C}$.

لكل $z \in \Omega$، نعرف عدد لف المنحنى γ في النقطة z بما يلي:

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt. \tag{1.3}$$

$I(\gamma, z)$ هي دالة تأخذ قيمها في $\mathbb{Z}$، ثابتة في كل قطعة مترابطة في Ω و تساوي 0 في القطعة المترابطة الغير محدودة في Ω.

البرهان

إذا كان $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ و $\sigma = \{a_0 = a, \ldots, a_n = b\}$ التجزيئ المصاحب للمنحنى γ, (يعني $\gamma_j = \gamma_{\restriction]a_{j-1},a_j[}$ إذا كان قابلة للإشتقاق)، إذاً

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt.$$

نعرف الدالة ψ على الفترة $[a,b]$ بما يلي:

$$\psi(s) = \exp\int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt.$$

لإثبات أنّ $\mathrm{Ind}(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$، يكفي أن نثبت أنّ $\psi(b) = 1$ لأن $\exp w = 1 \Leftrightarrow w \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$.
لكل s بحيث $\gamma'(s)$ معرفة،

$$\frac{\psi'(s)}{\psi(s)} = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \Leftrightarrow \psi'(s)(\gamma(s) - z) = \psi(s)\gamma'(s).$$

نستنتج أن مشتقة الدالة $\frac{\psi(s)}{\gamma(s) - z}$ تساوي صفر على فترة $]a_j, a_{j+1}[$، إذا هي ثابتة على كل فترة $[a_j, a_{j+1}]$ أين تكون γ قابل للإشتقاق، إذًا هي ثابتة على $[a, b]$.
و نستنتج أنّ $\frac{\psi(b)}{\gamma(b) - z} = \frac{\psi(a)}{\gamma(a) - z}$ و بما أنّ $\gamma(b) = \gamma(a)$، نستنتج أنّ $\psi(b) = \psi(a) = 1$, $(\psi(a) = e^0 = 1)$.

$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$ هي دالة متصلة على $[a, b]$ و هذا ينتج من مبرهنة الدوال المتصلة المعرفة بتكامل. من جهة أخرى الدالة $\mathrm{Ind}(\gamma, z) \longmapsto z$ هي متصلة على Ω، و قيمها في $\mathbb{Z}$، إذًا هي ثابتةعلى كل جزئ مترابط في Ω.

من جهة أخرى $\lim_{|z| \to +\infty} \mathrm{Ind}(\gamma, z) = 0$، إذًا الدالة $\mathrm{Ind}(\gamma, z) \longmapsto z$ تساوي 0 على الجزئ المترابط و الغير محدود في Ω.

□

ملاحظة 1.1.1
إذا كان γ منحنى مغلق قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة. عدد لف المنحنى γ في نقطة $z \notin \mathrm{range}(\gamma)$ هو عدد دوران المنحنى γ حول النقطة z عندما t يتغير على كل الفترة $[a, b]$.

نظرية 1.1.4
إذا كان γ دائرة و شعاعها r و مركزها a، و متجهة في الإتجاه الموجب، فإنّ $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = 1$ إذا كان $|z - a| < r$ و $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = 0$ إذا كان $|z - a| > r$.

البرهان
باستعمال المبرهنة الماضية، يكفي أن نحسب $\mathrm{Ind}(\gamma, a)$

$$\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - a} = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} d\theta = 1.$$

□

1.2 نظرية كوشي المحلية

1.2.1 وجود الدوال الأصلية

مبرهنة 1.2.1
لتكن $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة متصلة على مفتوح $\Omega \subset \mathbb{C}$.
يكون للدالة f دالة أصلية على Ω، إذا و إذا فقط إذا لكل منحنى مغلق قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة γ في Ω، $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

البرهان
لتكن F دالة أصلية للدالة f (أي $F' = f$ على Ω) و ليكن $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \Omega$ منحنى مغلق و قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة، يكون

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0,$$

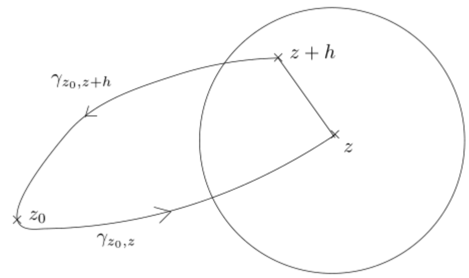
لأنّ $\gamma(a) = \gamma(b)$).
لنفرض أنّ $\int_\gamma f(z)dz = 0$ لكل منحنى مغلق و قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة γ. يكفي أن نوجد دالة أصلية محلية للدالة f. إذًا يمكن أن نفرض أنّ Ω مترابط، إذًا كل نقطتين من Ω يمكن ربطهما بمنحنى قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة في Ω.
ليكن $z_0 \in \Omega$، لكل $z \in \Omega$، يوجد منحنى قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة و يكون z_0 مركزه و z نهايته. ليكن γ_1 و γ_2 منحنين قابلين للمفاضلة باتصال قطعة قطعة بحيث

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$$

بحيث γ المنحنى المغلق المتحصل عليه بمجاورة المنحنى γ_1 و وعكوس المنحنى γ_2.
لتكن الدالة F المعلرفة على Ω كما يلي:

$$F(z) = \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)dw$$

بحيث $\gamma_{z_0,z}$ يكون قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة مركزه z_0 و نهايته z. الدالة F معرفة جيدا و F غير متغيرة باختيار $\gamma_{z_0,z}$.
سنثبت الآن أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f.



شكل 1.2:

ليكن $r > 0$ بحيث $D(z,r) \subset \Omega$ و ليكن h صغير بحيث $|h| < r$. ليكن تكامل الدالة f على المنحنى المغلق γ الذي هو نتيجة تجاور المنحنين $\gamma_{z_0,z}$ و $[z,z+h]$ و معكوس المنحنى $\gamma_{z_0,z+h}$.

$$\int_\gamma f(w)dw = \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)dw + \int_{[z,z+h]} f(w)dw - \int_{\gamma_{z_0,z+h}} f(w)dw = 0.$$

إذًا

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} (f(w)-f(z))dw.$$

و نستنتج أنّ

$$\lim_{h\to 0} |\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)| \leq \lim_{h\to 0} \sup_{w\in[z,z+h]} |f(w)-f(z)| = 0.$$

إذًا F قابلة للإشتقاق و $F'(z) = f(z)$.

□

نتيجة 1.2.2
بما أنّ $\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ هي دالة أصلية للدالة z^n، لكل $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$، إذًا $\int_\gamma z^n dz = 0$ لكل منحنى مغلق قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة γ، و لكل $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$، بحيث $0 \notin \operatorname{range}(\gamma)$ إذا كان $n \leq -2$.

تعريف 1.2.1
- نقوقل أنّ مجموعة $E \subset \mathbb{C}$ محدب إذا كان لكل $a, b \in E$، قطعة المستقيم $[a,b] \subset E$.

- نقوقل أنّ مجموعة E هي نجمية الشكل بالنسبة للنقطة $a \in E$ (a يسمى مركز نجمية المجموعة E) إذا كان $[a, z] \subset E$ لكل $z \in E$.

كل مجموعة محدبة هي نجمية الشكل بالنسبة لأي نقطة من هذه المجموعة.
نلاحظ كذلك أنّ كل مجموعة مترابطة أو نجمية الشكل فهي منطقة مضلعة.

1.2.2 حالة المفتوح محدب

مبرهنة 1.2.3
لتكن f دالة متصلة معرفة على مفتوح محدب Ω بحيث

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0,$$

لكل مثلث $\Delta \subset \Omega$، إذًا f لها دالة أصلية على Ω.

(النتيجة تبقى صحيحة إذا كان Ω نجمي الشكل).
البرهان
ليكن $z_0 \in \Omega$ و $z \in \Omega$، الفترة $[z_0, z] \subset \Omega$.
نعرف الدالة

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)dw.$$

إذا كان $\lambda \in \mathbb{C}^*$ بحيث $z + \lambda \in \Omega$، تكامل الدالة f على حدود المثلث $\Delta(z_0, z, z + \lambda)$ يساوي 0، إذًا

$$\frac{F(z+\lambda) - F(z)}{\lambda} - f(z) = \frac{1}{\lambda}\int_{[z,z+\lambda]} f(w)dw - \frac{1}{\lambda}\int_{[z,z+\lambda]} f(z)dw.$$

البرهان يمكن إكمالة على منوال برهان المبرهنة 1.2.1، إذًا $F'(z) = f(z)$.
$\square$

1.3 مبرهنة كوشي

1.3.1 مبرهنة كوشي عل مثلث

مبرهنة تمهيدية 1.3.1

لتكن $(K_n)_n$ متتالية تناقصية من المجموعات المتراصة الغير خالية في $\mathbb{C}$، بحيث $\lim_{n\to+\infty}(\delta(K_n))_n = 0$، ($\delta(K_n)$ هو قطر K_n). إذاً $\bigcap_n K_n$ هو نقطة واحدة.

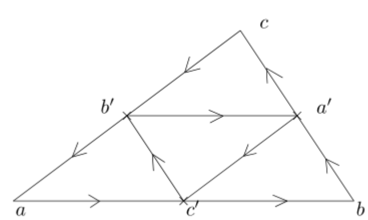
مبرهنة 1.3.2 (مبرهنة كوشي على مثلث)

ليكن Ω مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ و $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة هولومرفية على Ω. إذاً لكل مثلث Δ في Ω, $\int_{\partial\Delta} f(w)dw = 0$.

البرهان

ليكن $\Delta(a,b,c)$ مثلث في الإتجاه الموجب Δ و a', b', c' موسطات الفترات $[b,c], [c,a]$ و $[a,b]$ على التوالي.
ليكن مثلث Δ^j $(1 \leq j \leq 4)$ على التوالي $(c,b',a'),\ (b,a',c'),\ (a,c',b')$ و (a',b',c').
ليكن

$$J = \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta^j} f(z)dz.$$



شكل 1.3:

يوجد $1 \leq j \leq 4$ بحيث $|\int_{\partial\Delta^j} f(z)dz| \geq \frac{|J|}{4}$.
نرمز لهذا المثلث بـ Δ_1.
نطبق ما سبق على المثلث Δ_1 و بهذا نبني مثلث $\Delta_2 \subset \Delta_1$ بحيث

$$|\int_{\partial\Delta_2} f(z)dz| \geq \frac{1}{4}|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz| \geq \frac{|J|}{4^2}.$$

باستعمال الإستقراء الرياضي نبني متتالية من المثلثات التناقصية $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث لكل $n \in \mathbb{N}$،

$$|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz| \geq \frac{1}{4}|\int_{\partial\Delta_{n-1}} f(z)dz| \geq \frac{|J|}{4^n} \tag{1.4}$$

حسب بناء متتالية المثلثات $L(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n}L(\partial\Delta)$. ($L(\partial\Delta)$ هو طول $\partial\Delta$).
ليكن $\{z_0\} = \bigcap_n \Delta_n$. بما أنّ f قابلة للإشتقاق في النقطة z_0، فإنّ $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ r > 0$ بحيث

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0| \quad for|z - z_0| \leq r.$$

بما أنّ $\delta(\Delta_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N$ و لكل $z \in \Delta_n$، $|z - z_0| \leq r$.
نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}
|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz| &= |\int_{\partial\Delta_n}(f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0))dz| \leq \varepsilon \sup_{z\in\Delta_n} |z - z_0|L(\partial\Delta_n) \\
&\leq \varepsilon(L(\partial\Delta_n))^2 \leq \varepsilon(\frac{L(\partial\Delta)}{2^n})^2.
\end{aligned}$$

نستنتج من المتباينة (1.4) أنّ $\forall n \in \mathbb{N}$، $\frac{|J|}{4^n} \leq \frac{\varepsilon}{4^n}(L(\partial\Delta))^2$، و هذا يترتب عنه أنّ $|J| \leq \varepsilon(L(\partial\Delta))^2$، $\forall\varepsilon > 0$، إذاً $J = 0$. $\square$

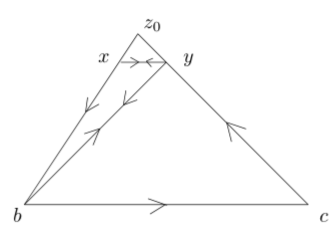
ملاحظة 1.3.1
المبرهنة 1.3.2 تبقى صحيحة للمسطيل. يكفي أن تقسم المستطيل إلى مثلثات متقايسة و نعيد نفس البرهان.

مبرهنة 1.3.3
ليكن $f\colon\ \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة متصلة و $z_0 \in \Omega$. لنفرض أنّ f هولولمرفية على $\Omega \setminus \{z_0\}$.
إذاً لكل مثلث $\Delta \subset \Omega$، $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

البرهان
ليكن $\Delta(a, b, c)$ مثلث في Ω.

- إذا كان $z_0 \notin \overline{\Delta}$، فإنّ f هولومرفية على $\Omega \setminus \{z_0\}$ و $\Delta \subset \Omega \setminus \{z_0\}$. إذاً $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

إذا كان $z_0 = a$ هو رأس للمثلث Δ.



شكل 1.4:

ليكن x و y نقطتين موجودتين على التوالي في $]a,b[$ و $]a,c[$ و قريبة من a.

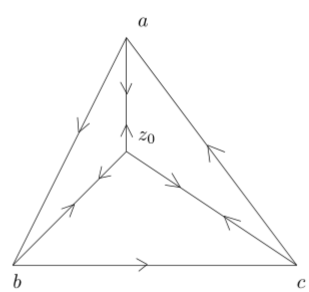
$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{[a,x,y]} f(z)dz + \int_{[x,b,y]} f(z)dz + \int_{[y,b,c]} f(z)dz.$$

باستعمال المبرهنة التمهيدية الماضية $\int_{[x,b,y]} f(z)dz = \int_{[y,b,c]} f(z)dz = 0$، إذاً

$$|\int_{\partial\Delta} f(z)dz| = |\int_{[a,x,y]} f(z)dz| \leq \sup_{z\in\Delta} |f(z)| L([a,x,y]),$$

بما أنّ x و y عشوائيا، فإنّ $L([a,x,y]) \underset{x,y\longrightarrow a}{\longrightarrow} 0$ و $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

- إذا كان z_0 في Δ و ليس رأسا للمثلث، نقسم المثلث إلى ثلاث مثلثات $[z_0,a,b],\ [z_0,b,c]$ و $[z_0,c,a]$، و نتحصل على النتيجة من الحالة الماضية.



شكل 1.5:

□

1.3.2 مبرهنة كوشي على محدب

مبرهنة 1.3.4

ليكن Ω مفتوح محدب في $\mathbb{C}$ و $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة متصلة و هولومرفية على $\Omega \setminus \{z_0\}$، $(z_0 \in \Omega)$.

إذاً f لها دالة أصلية على Ω و لكل منحنى مغلق قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة $\gamma \subset \Omega$، $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

البرهان

البرهان هو نتيجة المبرهنة 1.2.1، 1.2.3 و 1.3.2.

□

1.4 مبرهنة كوشي على الدائرة

مبرهنة 1.4.1
ليكن Ω مفتوح في $\mathbb{C}$ و يحتوي على القرص المغلق $\overline{D(z_0,r)}$، $r>0$ و لتكن $f\colon\ \Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ دالة هولومرفية. إذًا لكل $z\in D(z_0,r)$

$$f(z)=\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}dw, \tag{1.5}$$

بحيث $\gamma\colon[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{C}$ منحنى مغلق معرف بما يلي: $\gamma(t)=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

البرهان
يوجد $\varepsilon>0$ بحيث $D(z_0,r+\varepsilon)\subset\Omega$. لتكن g الدالة المعرفة على Ω بما يلي:

$$g(w)=\begin{cases} f'(z) & \text{if}\quad w=z\\ \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{if}\quad w\neq z\end{cases}.$$

الدالة g هولومرفية على $\Omega\setminus\{z\}$ و متصلة على Ω.
بالستعمال المبرهنة 1.3.4 (المفتوح المحدب هو $D(z_0,r+\varepsilon)$).

$$\int_\gamma g(w)dw=0=\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}dw-\int_\gamma\frac{f(z)}{w-z}dw.$$

إذًا $f(z)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi}\displaystyle\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}dw$ (لأنّ $\displaystyle\int_\gamma\frac{dw}{w-z}=2\mathrm{i}\pi$).

□

1.4.1 العلاقة بين الدوال التحليلية و الدوال الهولومرفية

مبرهنة 1.4.2
تكون دالة $f\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ هولومرفية على Ω إذا و إذا كان فقط إذا إذا كان و *only* إذا كان f تحليلية و لكل $z_0\in\Omega$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \tag{1.6}$$

هذه المتسلسلة متقاربة على أي قرص في Ω و مركزه z_0.

البرهان

ليكن $r > 0$ بحيث $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$.

$f(z) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$، بحيث $\gamma(\theta) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ و $|z - z_0| < r$.

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)(1-\frac{z-z_0}{w-z_0})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

المتسلسلة متقاربة على القرص $D(z_0, r)$. إذًا

1. $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n} d\theta$.
2. المتسلسلة $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n$ متقاربة على أي قرص في Ω و مركزه z_0.

العكس برهن في المبرهنة ?? chapter ؟؟؟.

□

نتيجة 1.4.3

ليكن Ω مفتوح في $\mathbb{C}$.

إذا كانت f دالة هولومرفية على Ω، فإنّ لكل $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ دالة هولومرفية على Ω.

1.4.2 أصفار الدوال الهولومرفية

مبرهنة 1.4.4

ليكن Ω نطاق في $\mathbb{C}$ و $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة هولومرفية. إذا كانت الدالة f ليست الدالة الصفرية، فإنّ أصفار الدالة f معزولة.

1.4.3 مبرهنة مريرا Morera's Theorem

مبرهنة 1.4.5 (مبرهنة مريرا)

لتكن f دالة متصلة على Ω. إذاً f هولومرفية على Ω إذا و إذا كان فقط إذا لكل مثلث $\Delta \subset \Omega$،

$$\int_{\partial\Delta} f(w) dw = 0.$$

البرهان
الشرط الضروري برهن في المبرهنة 1.3.2.
بالنسبة للشرط الكافي، الشرط $\int_{\partial\Delta} f(w)dw = 0$ لكل مثلث في Ω يثبت أنّ محليا الدالة f لها دالة أصلية F.
الدالة F هولومرفية، إذاً f i هي كذلك هولومرفية .

□

نتيجة 1.4.6
إذا كان $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ و متصلة على Ω، فإنّ $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. ($z_0 \in \Omega$).

البرهان
من المبرهنة 1.3.3 نتحصل على أنّ $\int_{\partial\Delta} f(w)dw = 0$ لكل مثلث Δ في Ω.
باستعمال مبرهنة Morera، الدالة f هولومرفية على Ω.

□

نتيجة 1.4.7
لتكن f دالة متصلة على مفتوح Ω.
العبارات التالية متكافئة
$i)$ f هولومرفية على Ω،
$ii)$ f تحليلية على Ω،
$iii)$ محليا الدالة f لها دالة أصلية،
$iv)$ لكل مثلث $\Delta \subset \Omega$،
$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

البرهان
i) $\Leftrightarrow$ ii): يحصل من المبرهنة 1.4.2.
iii) $\Rightarrow$ i): محليا الدالة f لها دالة أصلية F.
F هولومرفية، إذاً $F' = f$ هولومرفية نتيجة 1.4.3.
i) $\Rightarrow$ iv) هذه هي المبرهنة 1.3.4.
iv) $\Rightarrow$ iii) هذه نتيجة المبرهنة 1.2.3.

□

1.5 تمارين الباب الثالث

تمرين 1 :
ليكن γ_R المنحنى المعرف بما يلي: $\gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ 0 \leq t \leq \pi$، $R > 1$.
أثبت أن

1. $\left|\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2}\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1}$.
2. $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = 0$.

تمرين 2 :
لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال المتصلة على $\mathbb{C}$ و γ منحنى قابل للمفاضلة باتصال قطعة قطعة في $\mathbb{C}$.
نفترض أن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n$ تتقارب بانتظام على المنحنى γ نحو الدالة f.

1. أثبت أن $\int_\gamma f_n(z)dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\gamma f(z)dz$.
2. احسب $\int_\gamma f(z)dz$، حيث γ الدائرة نصف قطرها R و مركزها 0، ($\gamma(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t};\ 0 \leq t \leq 2\pi$)، لكل من $f(z) = \sin z$ و $f(z) = \mathrm{e}^z$.

تمرين 3 :

1. احسب $\int_\gamma \frac{\cos \pi z}{z^2-1}dz$، حيث γ المستطيل و رؤوسه $\pm\mathrm{i}$، $2 \pm \mathrm{i}$ موجه للإتجاه الموجب.
2. أثبت أن $\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{zt}}{1+z^2}dz = \sin t$، لكل $t > 0$. (γ الدائرة و التي نصف قطرها 3 و مركزها في 0 موجه للإتجاه الموجب.)
3. احسب $\int_\gamma \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz$، حيث γ الدائرة والتي نصف قطرها 3 و مركزها في 0 موجه للإتجاه الموجب.

تمرين 4 :
لتكن f دالة هولومرفية على $\mathbb{C}$.

باستعمال مبرهنة كوشي، أثبت أن:

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}.$$

استنتج برهان ثان لمبرهنة Liouville .

تمرين 5 :

ليكن r و R عددين حقيقيين بحيث $0<r<R$ و ليكن $\mathscr{C}=\{z\in\mathbb{C};\ r\leq|z|\leq R\}$.
هل متتالية من كثيرة حدود تتقارب بانتظام على $\mathscr{C}$ نحو الدالة $f(z)=\frac{1}{z}$؟

تمرين 6 :

أثبت أن بدون حساب

$$\cos(z+w)=\cos z\ \cos w-\sin z\ \sin w,\quad \forall\ z,w\in\mathbb{C}.$$

تمرين 7 :

لتكن f و g دالتين هولومرفيتين و ليس لهما أصفار على نطاق Ω في $\mathbb{C}$. نفترض أنه توجد متتالية $(a_n)_n$ في Ω تتقارب نحو $a\in\Omega$، $a_n\neq a$ و $\dfrac{f'(a_n)}{f(a_n)}=\dfrac{g'(a_n)}{g(a_n)}$، $\forall n\in\mathbb{N}$.
أثبت أن $f=cg$ على Ω، حيث c عدد ثابت.

تمرين 8 :

لكل حالة من الحالات التالية، هل توجد دالة هولومرفية بجوار 0 و تحقق الشرط المطلوب لكل all $n\in\mathbb{N}$؟

أ) $f(\dfrac{1}{n})=\sin\dfrac{\pi n}{2}$ ب) $f(\dfrac{1}{n})=\dfrac{\cos n\pi}{n}$ ج) $f(\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{2n+1}$.

د) $f(\dfrac{1}{n})=f(\dfrac{-1}{n})=\dfrac{1}{n^2}$ هـ) $f(\dfrac{1}{n})=f(\dfrac{-1}{n})=\dfrac{1}{2n+1}$ و) $f(\dfrac{1}{n})=\mathrm{e}^{-n}$.

تمرين 9 :

لتكن f دالة هولومرفية على $\mathbb{C}$. نفترض أن f حقيقية على المحور (ox) و تخيلية على محور الأعداد التخيلية. أثبت أن الدالة f فردية.

تمرين 10 :

لتكن U دالة توافقية قابل للمفاضلة باتصال من الدرجة 2 على $D(0,R)$.
لتكن $f(z)=\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y)-\mathrm{i}\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y)$، حيث $z=x+\mathrm{i}y$.

1. أثبت أن الدالة f هولومرفية على $D(0,R)$.

2. أثبت أن الدالة f لها دالة أصلية على $D(0,R)$ و استنتج أن U هي الجزئ الحقيقي لدالة هولومرفية على $D(0,R)$.

3. أثبت أن النتيجة تبقى صحيحة إذا أبدلنا القرص $D(0,R)$ بمفتوح نجمي الشكل بالنسبة لنقطة منه.

تمرين 11 :
لتكن f دالة متصلة على مفتوح Ω و هولومرفية على $\Omega \setminus \mathscr{D}$، حيث $\mathscr{D}$ مستقيم في $\mathbb{C}$.
أثبت أن الدالة f هولومرفية على Ω.

تمرين 12 : (قانون التناظر لشواتز Schwarz's Symmetric Principle)
ليكن Ω نطاق متناظر بالنسبة للمحور (ox).

1. أثبت أن $\Omega \cap \mathbb{R}$ هي مجموعة غير خالية.

2. أثبت أن لكل دالة هولومرفية f على Ω، العبارات التالية متكافئة:
   أ) $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ لكل $z \in \Omega$.
   ب) $f(x)$ حقيقي لكل $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$.

3. إذا كانت f دالة هولومرفية على Ω، أثبت أن دالتين هولومرفيتين فقط g و h على Ω، حقيقية على $\Omega \cap \mathbb{R}$ و $f = g + \mathrm{i}h$.

4. لتكن f دالة هولومرفية على $\Omega^+ = \{z \in \Omega;\ \operatorname{Im} z > 0\}$ متصلة على $\Omega^+ \cup (\Omega \cap \mathbb{R})$ و حقيقية على $\Omega \cap \mathbb{R}$.
   أثبت أن الدالة f يمكن تمديدها كدالة هولومرفية على Ω.

5. أوجد الدالة f_1 تمديد الدالة f إذا كان الشرط أن f حقيقية على $\Omega \cap \mathbb{R}$ عوض بالشرط التالي:
   (ا) $\operatorname{Re} f(z) = 0$ على المحور (ox).
   (ب) $\operatorname{Im} f(z) = 1$ على المحور (ox).
   (ج) $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Im} f(z)$ على المحور (ox).
   (د) $\operatorname{Arg} f(z) = \alpha$ على المحور (ox).