أنظمة المعادلات الخطية

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

24 أفريل 2017

المحتويات

1. طريقة جاوس و جاوس جوردن
2. الأنظمة الخطية المتجانسة
3. قاعدة كرامر
4. إصلاح تمارين الباب الثالث

مدخل للأنظمة الخطية

لنبدأ بطرح المسألة التالية:
نريد معرفة عمر الأب و عمر الإبن إذا كانت لنا المعطيات التالية:
إذا أخذنا أربعة أضعاف عمر الإبن و طرحنا منها عمر الأب نجد 5، و إذا أخذنا ضعف عمر الأب و طرحنا منها سبع أضعاف عمر الإبن نجد 3.
الجواب إذا كان عمر الأبن هو x و عمر الأب هو y نجد المعدلتين التاليتين:

$$\begin{cases} 4x & - & y & = & 5 \\ -7x & + & 2y & = & 3 \end{cases}$$

هاتين المعادلتين تسمى نظام خطي، و x, y تسمى المجاهيل.
سنعطي طريقتين لحل هذا النظام:

الطريقة الأولى

المعلة الأولى متكافئة مع المعادلة التالية: $8x - 2y = 10$ و بجمع هذه المعادلة مع المعادلة الثانية نجد أن $x = 13$ و بتعويض قيمة x في أي معادلة نجد أن $y = 47$.

الطريقة الثانية

النظام الخطي السابق متكافئ مع الكتابة التالية

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ فإن النظام الخطي متكافئ
مع $X = A^{-1}B \iff AX = B$.
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ و $X = \begin{pmatrix} 13 \\ 47 \end{pmatrix}$.

طريقة جاوس و جاوس جوردن

تعريف

إذا كانت $(a_{j,k})$ أعدادا حقيقية $(1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n)$ و إذا كانت $x_1, \ldots, x_n$ مجاهيل و إذا كانت $b_1, \ldots, b_n$ أعدادا حقيقية. يمكن كتابة نظام معادلات خطية كما يلي

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & + & \vdots & + & \vdots & & \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m. \end{array}\right.$$

و يمكن كتابة هذا النظام الخطي في صيغة مصفوفات كما يلي: $AX = B$ مع

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

مثال

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ و المصفوفة $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ و نبحث عن مصفوفة من درجة $(2,3)$ بحيث $AB = C$.

إذا كانت $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \end{pmatrix}$ نتحصل على النظام الخطي التالي:

$$\begin{cases} x - t &= 0 \\ x - 2t &= 1 \\ y - u &= 1 \\ y - 2u &= 2 \\ z - v &= 2 \\ z - 2v &= 3 \end{cases}$$

إذًا

$$x = t = -1, y = 0, u = -1, z = 1, v = -1.$$

تعريف

1. نقول أن نظامين من المعادلات الخطية متكافئان إذا كان لهما نفس مجموعة الحلول.
2. نقول أن نظام خطي متسقا أو متآلفا إذا كان له حل و نقول أنه غير متسق إذا لم يكن له حل.

طريقة جاوس

سنقوم بتوسيع المصفوفة A و ذلك باضافة المصفوفة B و نحصل على مصفوفة $[A|B]$ وتسمى المصفوفة الموسعة
لحل النظام الخطي سنقوم بوضع المصفوفة الموسعة $[A|B]$ على صيغة درجية صفية و نحصل على نظام خطي مثلثي مكافئ للنظام الخطي الأول و هذه الطريقة تسمى طريقة جاوس لحل النظام الخطي.

طريقة جاوس جوردن

لحل النظام الخطي سنقوم بوضع المصفوفة الموسعة $[A|B]$ على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة و نحصل على نظام خطي مكافئ للنظام الخطي الأول و هذه الطريقة تسمى طريقة جاوس جوردن لحل النظام الخطي.

الأنظمة الخطية المتجانسة

تعريف

نقول أن نظام خطي $AX = B$ متجانس إذا كان $B = 0$.

ملاحظات

1. كل نظام خطي متجانس متسق لأن الحل التافه هو حل لهذا النظام.
2. إذا كان X_1 و X_2 حلان للنظام الخطي المتجانس $AX = 0$ فإن $X_1 + \lambda X_2$ هو حل للنظام الخطي لكل $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. إذا كان للنظام الخطي المتجانس $AX = 0$ حل غير صفري فإن النظام له عدد ما لا نهائي من الحلول.

مبرهنة

إذا كان للنظام الخطي $AX = B$ حل X_0 إذا كل حل X للنظام الخطي سيكون على الصيغة $X = X_0 + X_1$ حيث X_1 حل للنظام المتجانس $AX = 0$.

قاعدة كرامر

مبرهنة

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n ولها معكوس إذا الحل الوحيد للنظام الخطي $AX = B$ هو

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

حيث A_j هي المصفوفة A_j هي المصفوفة التي نتحصل عليها من المصفوفة A بوضع العمود B عوضا عن العمود C_j

مثال

استخدم قاعدة كرامر لحساب x, y, z التي تحقق النظام التالي

$$\begin{cases} 3x - 2z = 2 \\ -2x + 3y - 2z = 3 \\ -5x + 4y - z = 1 \end{cases}$$

$$,\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$,\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -8 = x$$

$$,\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -13 = y$$

$$.\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -13 = z$$

تمارين

1. أوجد حلول الأنظمة الخطية التالية
$$\begin{cases} x+2y-z &= -4 \\ -x+y &= -2 \\ y-z &= -4 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x+2y-z+t &= 1 \\ 3x-y+5z-t &= 2 \\ 5x+3y+3z+t &= \alpha \end{cases} \qquad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. $$\begin{cases} -2y+3z &= 0 \\ 2x-4y+2z &= 1 \\ -x-2y+5z &= 0 \\ x-2y &= 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -2y+3z &= 0 \\ 2x-4y+2z &= 0 \\ -x-2y+5z &= 0 \\ x-2y-z &= 1 \end{cases}$$ 4

$$\begin{cases} x+y-z+t &= 0 \\ z-2t &= 0 \end{cases}$$ 5

$$\begin{cases} 6x+3y-z &= 2 \\ -4x+y-6z &= 0 \\ x+2y-5z &= -1 \end{cases},$$ 6

7 $$\left\{\begin{array}{rcl} y+3z-2t &=& 0 \\ 2x+y-4z+3t &=& 0 \\ 2x+3y+2z-t &=& 1 \end{array}\right. ,$$

8 $$\left\{\begin{array}{ccl} x+my+(m-1)z &=& m+1 \\ 3x+2y+mz &=& 3 \\ (m-1)x+my+(m+1)z &=& m-1 \end{array}\right.$$

9 $$\left\{\begin{array}{ccl} x+2y+z &=& 1 \\ 2x+(a+3)y+3z &=& 3 \\ x+(-a+3)y+(a-2)z &=& 0 \end{array}\right.$$

أوجد حلول الأنظمة الخطية التالية بالستعمال طريقة جاوس جوردن

1
$$\begin{cases} x+y+2z &= 8 \\ -x-2y+z &= 1 \\ 3x-7y+4z &= 10 \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} x-y+2z-w &= -1 \\ 2x+y-2z-2w &= -2 \\ -x+2y-4z+w &= 1 \\ 3x-3w &= -3 \end{cases}$$

3
$$\begin{cases} 2x+2y+2z &= 0 \\ -2x+5y+2z &= 0 \\ -7x+7y+z &= 0 \end{cases}$$

4
$$\begin{cases} 2x - 3y &= -2 \\ 2x + y &= 1 \\ 3x + 2y &= 1 \end{cases}$$

5
$$\begin{cases} 3x + 2y - z &= -15 \\ 5x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x + y + 3z &= 11 \\ 11x + 7y &= -30 \end{cases}$$

6
$$\begin{cases} 4x - 8y &= 12 \\ 3x - 6y &= 9 \\ -2x + 4y &= -6 \end{cases}$$

7
$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 11 \\ x + 2y + z + t = 9 \\ x + y + z + 2t = 6 \\ 2x + y + z + t = 14 \end{cases}$$

1. أوجد علاقة بين a, b, و c حتى يكون النظام التالي متسق.
$$\begin{cases} x+y+2z &= a \\ x+z &= b \\ 2x+y+3z &= c \end{cases}$$
2. أثبت أنه إذا كان $ad-bc\neq 0$, فإن الصيغة الدرجية الصية للمصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ هي $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. عين كل من $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ التي من أجلها يكون $(1, -1, 2)$ حلا للنظام الخطي

$$\begin{cases} ax + by - 3z = -3 \\ -2x - by + z = -1 \\ ax + 3y - cz = -1 \end{cases}.$$

2. أثبت أن $(\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{2})$ هو حلا وحيدا للنظام الخطي في الفقرة (1).

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
أثبت أن النظام الخطي $AX = B$ متسق إلا وإذا كان $b - a = c - b$.

1 المصفوفة الموسعة لهذا النظام هي

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

و المصفوفة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

هي صيغة درجية صفية لهذه المصفوفة. إذا باستعمال طريقة جاوس، النظام له حل وحيد وهو $x = 1, y = -1, z = 3$.
و الصيغة الدرجية الصفية المختزلة لهذه المصفوفة هي

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

إذا باستعمال طريقة جاوس جوردن، النظام له حل وحيد وهو $x = 1, y = -1, z = 3$.

2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-4 \end{array}\right]$$

هي صيغة درجية صفية لهذه المصفوفة.
إذا كان $m \neq 4$ النظام غير متسق. و إذا كان $m = 4$ النظام له عدد غير منته من الحلول.

$$\{(\frac{5}{7} - \frac{9}{7}z + \frac{1}{7}t, \frac{1}{7} + \frac{8}{7}z - \frac{4}{7}t, z, t) \in \mathbb{R}^4\}.$$

3 المصفوقة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right]$

الصيغة الدرجية الصفية:

$1R_{1,2}$, $-3R_{1,3}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right]$

$-R_2$, $10R_{2,3}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -32 & -104 \end{array}\right]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array}\right] :-\frac{1}{32}r_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array}\right] :(-1)R_{2,1}$$

$$.\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array}\right] :3R_{3,2}, (-5)R_{3,1}$$

الحل هو $x = \frac{3}{4}, y = \frac{3}{4}, z = \frac{13}{4}.$

4 المصفوقة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right].$

الصيغة الدرجية الصفية:

$$(-2)R_{1,2}, 1R_{1,3}, (-3)R_{1,4}: \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$R_{2,3}, (-3)R_{2,3}, (-3)R_{2,4}: \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$1R_{2,1}: \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

الحل هو $x = u - 1$, $y = 2s$, $z = s$, $t = u$.

5. الحل هو $x = -3t$, $y = -4t$, $z = 7t$.
6. النظام غير متسق.
7. $x = -4$, $y = 2$, $z = 7$.
8. $x = 3 + 2t$, $y = t$.
9. المصفوفة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array}\right]$.

الصيغة الدرجية الصفية: $(-1)R_{1,2}$, $(-2)R_{1,3}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & -1 & -1 & c-2a \end{array}\right].$$

$(-1)R_2$, $1R_{2,3}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{array}\right]$.

إذا لا يكون النظام متسقا إلا إذا كان $-a - b + c = 0$.

1. $(1,-1,2)$ هو حل للنظام الخطي إلا و إذا كان $a=2$, $b=-1$ و $c=0$.
2. بما أن مصفوفة النظام الخطي

$$\begin{cases} 2x-y-3z=-3 \\ -2x+y+z=-1 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$$

لها معكوس إذا النظام الخطي له حل وحيد.
(محدد المصفوفة يساوي 16)

- $B = \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ و $|A| = 2$.
- $A^{-1} = \frac{1}{2}B$.

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$.A(A - B) = 2I_3$$

$$.A^{-1} = \frac{1}{2}(A - B)$$

المصفوفة الموسعة

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 14 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

إذا $x = 6,\ y = 1,\ z = 3,\ t = -2$.