Topological Equivalence التكافئ التوبولوجي (Homeomorphism)

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

11 نوفمبر 2019

المحتويات

التكافئ التوبولوجي

تعريف

يقال أن الدالة $f\colon X \longrightarrow Y$ بين الفضائين التوبولوجيان X و Y دالة تكافؤ توبولوجي إذا تحققت الشروط التالية:

1. f دالة متباينة وشاملة.
2. f و f^{-1} دالتان متصلتان

تعريف

يقال أن الفضائين X و Y متكافآن توبولوجيا، ونكتب ذلك $Y \sim X$ إذا وجدت دالة تكافؤ توبولوجي بينهما.

مثال

لتوضيح مفهوم التكافؤ التوبولوجي نورد الأمثلة التالية
لتكن $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{I}_D) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{I}_U)$
دالة معرفة x $f(x) = x$.
الدالة f أحادية وشاملة و متصلة و لكن الدالة f^{-1} ليست متصلة. و بالتالي ليست تكافؤ توبولوجي.

مثال

لتكن $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{I}_U) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{I}_U)$
دالة معرفة $f(x) = x + 1$.
الدالة f تكافؤ توبولوجي.

مثال

الدالة $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_U) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{I}_{LL})$:f من فضاء النهاية السفلى إلى الفضاء المعتاد والمعرفة دالة معرفة $f(x) = x$.

الدالة f أحادية وشاملة و متصلة و لكن الدالة f^{-1} ليست متصلة. و بالتالي ليست تكافؤ توبولوجي.

نظرية

العلاقة " تكافؤ توبولوجيا" علاقة تكافؤ.

نعطي بعض الأمثلة التي توضح أن هذين المفهومين ومفهوم الاتصال لا ارتباط بينهما.

تعريف

لتكن $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة من الفضاء X إلى الفضاء v. نقول أن

1. f دالة مفتوحة إذا كان لكل مجموعة مفتوحة U في X فإن $f(U)$ مجموعة مفتوحة في Y
2. f دالة مغلقة إذا كان لكل مجموعة مغلقة M في X فإن $f(M)$ مجموعة مغلقة في Y.

مثال

أثبتنا أن الدالة $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_D) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{I}_U)$:f، $f(x) = x$ ليست متصلة بينما هذه الدالة مفتوحة ومغلقة. أثبتنا أيضا أن الدالة $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_U) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{I}_D)$:f، متصلة ولكنه ليست مغلقة, كما يمكن رؤية ذلك بسهولة حيث أن المجموعة $[0, 1)$ مغلقة ومفتوحة في الفضاء المتقطع ولكن $f([0, 1)) = [0, 1)$ ليست مغلقة ولا مفتوحة في الفضاء المعتاد.

النظرية التالية تعطي شروطا مكافئة للتكافؤ التوبولوجي.

نظرية

لتكن $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة متباينة وشاملة من الفضاء X إلى الفضاء Y . فإن الشروط التالية متكافئة:

1. f دالة تكافؤ توبولوجي (f, f^{-1} دالتين متصلتين)
2. f دالة متصلة ومفتوحة.
3. f دالة متصلة ومغلقة.
4. لأي مجموعة جزئية A في X فإن $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

نظرية

إذا كانت $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة متباينة ومفتوحة, وكانت $A \subset X$، فإن $f_{|A} : A \longrightarrow f(A)$ دالة متباينة وشاملة ومفتوحة. أكثر من ذلك إذا كانت f دالة متصلة، فإن $f_{|A} : A \longrightarrow f(A)$ دالة تكافؤ توبولوجي.

ملاحظة

تجدر الملاحظة هنا أن الشرط على الدالة f بأنها متباينة ضروري. ويمكن رؤية ذلك من أن الدالة الإسقاطية $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ مفتوحة ولكن قصر الدالة

$$p_{1|\mathbb{R}\times\{0\}\cup\{0\}\times\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ليست مفتوحة.

الشرط المتمثل بأن f و f^{-1} دوال متصلة يعني أن صورة كل مجموعة مفتوحة في X مجموعة مفتوحة في Y وصورة كل مجموعة مفتوحة في Y مجموعة مفتوحة في X. هذا يعني أن دالة التكافؤ التوبولوجي ليست دالة تقابل واحد - واحد بين عناصر X و عناصر Y فقط, ولكنها أيضا دالة تقابل واحد - واحد بين المجموعات المفتوحة في X والمجموعات المفتوحة في Y

هذا يقترح علينا أنه إذا كان X يكافئ توبولوجيا Y فإن كل خاصية معرفة باستخدام المجموعات المفتوحة تحقق للفضاء X يجب أن تتحقق للفضاء Y لتوضيح هذه الأفكار دعنا ننظر للأمثلة التالية ولتوضيح ما تقدم نذكر الأمثلة التالية. سنثبت فيما بعد أن الفترة المفتوحة $(0,1)$ تكافئ توبولوجيا

مثال

1. لا يعرف مفهوم الطول باستخدام المجموعات المفتوحة. لذلك فإن دالة التكافؤ التوبولوجي لا تحافظ على الطول. طول الفترة $(0,1)$ يساوي الواحد بينما طول $\mathbb{R}$ والذي يكافئها توبولوجيا غير منته.
2. أيضاً كون المجموعة محددة لا يعتمد في تعريفه على المجموعات المفتوحة في الفضاء لذلك المجموعة $(0,1)$ محدودة بينما $\mathbb{R}$ والذي يكافئها توبولوجيا غير محدود. أي أن دالة التكافؤ التوبولوجي لا تحافظ على مفهوم كون المجموعة محدودة.
3. بينما مفهوم كون الفضاء هاوزدورف يعتمد في تعريفه على المجموعات المفتوحة فإذا كان X فضاء هاوزدورف وكان Y فضاءً توبولوجيا يكافئ X فإن Y فضاء هاوزدورف والسبب في ذلك هو :

بما أن $X \sim Y$ بالتالي توجد دالة تكافؤ توبولوجي $f\colon X \longrightarrow Y$. ليكن $y_1 \neq y_2$ في Y، بما أن f دالة أحادية وشاملة، يوجد $x_1 \neq x_2$ عنصرين وحيدين في X بحيث أن $f(x_1) = y_1$ و $f(x_2) = y_2$ لكن X هاوزدورف لذا توجد مجموعتين U و V مفتوحتين ومنفصلتين في X بحيث أن $x_1 \in U$ و $x_2 \in V$. أيضا f دالة تكافؤ توبولوجي لذا $f(U)$ و $f(V)$ مجموعتين مفتوحتين ومنفصلتين في Y وأن $y_1 \in f(U)$ و $y_2 \in f(V)$. إذاً Y فضاء هاوزدورف.

إذاً مفهوم هاوزدورف انتقل من X إلى Y من خلال دالة التكافؤ f. هذا يقودنا إلى التعريف التالي:

تعريف

نقول أن الخاصية P خاصية توبولوجية إذا تحققت لفضاء X فإنها تتحقق لكل فضاء توبولوجي Y يكافئ توبولوجيا X.

ملاحظة

تستخدم الخاصية التوبولوجية في إثبات أن فضائين توبولوجيين غير متكافئين توبولوجيا، بمعنى إذا كانت P خاصية توبولوجية متحققة للفضاء X ولكنها غير متحققة للفضاء Y نستنتج أن X و Y غير متكافئين توبولوجيا. ولكنها لا تستخدم لإثبات التكافؤ التوبولوجي.

مثال

الفضاء المعتاد $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_U)$ فضاء هاوزدورف بينما فضاء المتممة المنتهية $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_C)$ ليس فضاء هاوزدورف.
وبما أن خاصية هاوزدورف توبولوجية فإن الفضاء المعتاد لا يكافئ توبولوجيا فضاء المتممة المنتهية . وهذا البرهان أسهل بكثير من أثبات أن كل دالة يمكن تعريفها بين الفضاءين لا تحقق أحد شروط التكافؤ التوبولوجي. ولكن بالمقابل الفضاء المتقطع $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_D)$ فضاء هاوزدورف ولا يمكن الاستنتاج بأنه يكافئ توبولوجيا الفضاء المعتاد, وعلى النقيض سنرى في الباب الخامس أنهما غير متكافئين توبولوجيا.

مثال

خاصية المجموعة الجزئية الكثيف والقابلة للعد توبولوجية. ليكن X فضا توبولوجي ولتكن A مجموعة كثيفة قابلة للعد جزئية من X وليكن Y فضاء يكافئ توبولوجيا X. ولتكن $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة التكافؤ التوبولوجي، لتكن A مجموعة كثيفة قابلة للعد جزئية من X بالتالي $f(A)$ قابلة للعد في Y بما أن A كثيفة في X و f دالة متصلة فإن $f(\bar{A}) = f(X) =$ $Y \subset \overline{f(A)} \subset Y$، بالتالي $\overline{f(A)} = Y$. إذاً $f(A)$ مجموعة كثيفة قابلة للعد في Y.

مثال

خاصية المتتالية المتقاربة توبولوجية.
ليكن X فضاء توبولوجي و $(x_n)_n$ متتالية في X متقاربة من $x \in X$ ليكن Y فضاء توبولوجي يكافئ توبولوجيا X و Y و $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة التكافؤ التوبولوجي. المتتالية $(f(x_n))_n$ في Y متقاربة من $f(x) \in Y$.

لكل $Y \times X \ni (a, b)$ تسمى كل من المجموعتين $\{b\} \times X$ و $Y \times \{a\}$ شريحة (Slice) خلال النقطة (a, b) وموازيتين لكل من X و Y على الترتيب. كل شريحة موازية للفضاء الموازية له.

نظرية

ليكن
X و Y فضائين توبولوجيين. ولتكن (a, b) نقطة في الفضاء التوبولوجي $Y \times X$ فإن الفضاء الجزئي $\{b\} \times X$ يكافئ توبولوجيا X و الفضاء الجزئي $Y \times \{a\}$ يكافئ توبولوجيا Y

نوهنا في الباب الأول عند تعريفنا لجداء مجموعتين أن جداء ثلاث مجموعات ليس عملية تجميعية. بالنسبة للتوبولوجي فكون العملية ليست تجميعية ليس ذات أهمية وذلك لأن لعدد منته من الفضاءات فإنها متكافئة توبولوجيا، أي توبولوجيا، فإن $X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$ نستخدم $=$ بدلا من $\sim$ دون أي تحفظ. النظري التالية. نثبت لعدد منته من الفضاءات التكافؤ التوبولوجي

نظرية

إذا كان $X_1, \ldots, X_n$ فضاءات توبولوجية فإن:

$$X_1 \times \ldots \times X_n = (X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n \sim X_1 \times (X_2 \times \ldots \times X_n)$$