متسلسلات القوى حلول لمادلات تفاضلية خطية Power Series Solution of Linear Dffierential Equations

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

14 نوفمبر 2019

المحتويات

تعريف

1 متسلسلة القوى مركزها $a \in \mathbb{R}$ هي متسلسلة دوال

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x-a)^n$$

حيث $(a_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية.

2 نقوقل أن دالة $f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ تحليلية عند النقطة $a \in I$ إذا وجد $r > 0$ بحيث

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

لكل $x \in (a-r, a+r) \subset I$.
النقطة a يسمى كذلك نقطة عادية بالنسبة للدالة f.

إذا كانت الدالة f غير تحليلية عند النقطة a، نقول أن النقطة a نقطة شاذة بالنسبة للدالة f.

نقول إن دالة $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ تحليلية على فترة مفتوحة I إذا كانت تحليلية عند كل 3
نقطة في I.

في برنامج التحليل، نثبت أن لكل متسلسلة قوى، يوجد $R \in [0, +\infty]$ بحيث تكون متسلسلة القوى $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ متقاربة مطلقا على الفترة $(a-R, a+R)$، إذا كان $R > 0$ و متقاربة عند النقطة $\{a\}$ إذا كان $R = 0$.
يسمى هذا العدد R نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى.
المتسلسلة تتقارب لكل x حيث $|x-a| < R$ و تتباعد لكل x حيث $|x-a| > R$.
$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$، غذا كانت النهاية موجودة. كذلك $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$، غذا كانت النهاية موجودة.
و في الحالة العامة

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}.$$

أمثلة

1

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad |x| < 1.$$

2

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n}, \qquad |x| < 1.$$

3

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

4

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

5

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

6

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

7

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

مبرهنة

إذا كانت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ لكل $|x-a| < r$، فإن الدالة f قابلة للإشتقاق على الفترة $(a-r, a+r)$ و

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

و a

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

نتيجة

إذا كانت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ for $|x-a| < r$، فإن الدالة f هي C^∞ على الفترة $(a-r, a+r)$، $f(a) = a_0$ و $a_n = \frac{f^{(n)}}{n!}$، لكل $n \in \mathbb{N}$.

المبرهنة التالية تثبت أنه إذا كانت معامل هذه المعادلة دوال تحليلية بجوار نقطة طبيعية a و إذا كان R أصغر نصف قطر التقارب لهذه الدوال فإن المعادلة التفاضلية الخطية لها حل كدالة تحليلية و نصف قطر تقارب بجوار النقطة a على الأقل R.

مبرهنة

إذا كانت $a_1, \ldots, a_n, f$ تحليلية عند النقطة a، فإن حلول المعادلة التفاضلية

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f$$

تحليلية حيث نصف قطر التقارب سيكون على الأقل أصغر قطر التقارب للدوال $a_1, \ldots, a_n, f.$

أمثلة

1. لتكن المعادلة التفاضلية $y'' - 2y = 0$.
معامل هذه المعدلة التفاضلية تحليلية. و بالتالي فإن كل حل لهذه المعادلة التفاضلية تحليلية.

إذا كانت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حل، فإن

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$ و

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n.$$ إذًا لكل

$x \in \mathbb{R}$. و نستنتج أن $(n+1)(n+2)a_{n+2} = 2a_n$ لكل $n \geq 0$. و بالتالي فإن

$$a_{n+2} = \frac{2a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad \forall n \geq 0.$$

و نحصل على $a_{2n+1} = \dfrac{2^n a_1}{(2n+1)!}$, $a_{2n} = \dfrac{2^n a_0}{(2n)!}$ و بالتالي فإن

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = a_0 \cosh(\sqrt{2}x) + \frac{a_1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}x).$$

2. لتكن المعادلة التفاضلية التالية $y'' + xy = 0$.

إذا كانت $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ حلا لهذه المعادلة التفاضلية، فإن نصف قطر التقارب للمتسلسلة $R = +\infty$.

$y'' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$ و $xy = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n$.

و بالتالي فإن

$$
\begin{aligned}
y^{''} + xy &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n \\
&= 2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_{n-1}\right)x^n.
\end{aligned}
$$

إذاً $a_2 = 0$ و $(n+3)(n+2)a_{n+3} + a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
و باستعمال الإستقراء الرياضي نحصل على $a_{3n+2} = 0$ لكل $n \geq 0$ و

$$a_{3n} = \frac{a_0(-1)^n}{3n(3n-1)(3n-3)(3n-4)\dots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2},$$

$$a_{3n+1} = \frac{a_1(-1)^n}{(3n+1).3n(3n-2)(3n-3)\dots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}.$$

إذاً $y = a_0 y_1 + a_1 y_2$ حيث $y_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} x^{3n}$ و

$$y_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n+1} x^{3n+1}.$$

تعريف

لتكن المعادلة التفاضلية الخطية

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \qquad (1)$$

نقوا إن نقطة a عادية أو طبيعية بالنسبة للمعادلة التفاضلية ((1)) إذا كانت المعامل $\dfrac{b(x)}{a(x)}$ و $\dfrac{c(x)}{a(x)}$ تحليلية عند النقطة a.
إذا كانت النقطة غير عادية بالنسبة للمعادلة التفاضلية (**??**(eq4-1 فنقول أن النقطة a هي نقطة شاذة.

مثال

النقاط 1 و -1 هي النقاط الشاذة الوحيدة بالنسبة للمعادلة التفاضلية

$$(x^2-1)y'' + 2xy' + 6y = 0$$

مبرهنة

إذا كانت a نقطة عادية بالنسبة للمعادلة التفاضلية ((1))، توجد دالتين تحليليتين بجوار النقطة a و مستقلة خطيا

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$$

هذه المتسلسلة متقاربة على الفترة $(a-R, a+R)$، حيث R هي المسافة بين a و أقرب نقطة شاذة (في $\mathbb{C}$) للمعادلة التفاضلية.

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية التالية

$$(x^2 - 4x + 3)y'' + 2xy' + 6y = 0.$$

يوجد حلين مستقلين خطيا و حلولا لهذه المعادلة التفاضلية كمتسلسلة قوى بجوار 0 حيث يكون نصف قطر التقارب $R = 1$ و يوجد حلين مستقلين خطيا و حلولا لهذه المعادلة التفاضلية كمتسلسلة قوى بجوار 3 حيث يكون نصف قطر التقارب $R = 2$

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' + xy' + y = 0.$$

و لتكن متسلسلة قوى $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ حلا لهذه المعادلة التفاضلية.

$y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ و $y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

$y'' + xy' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$.

إذًا $a_{n+2} = -\dfrac{1}{n+2} a_n$.

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} a_0, \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!} a_1.$$

الحلول المستقلة خطيا هي:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n} = e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad y_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية التالية

$$(x^2+1)y'' + xy' + y = 0.$$

و لتكن متسلسلة قوى $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ حلا لهذه المعادلة التفاضلية.

$xy' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$, $x^2 y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n$ و $y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$.

$$\begin{aligned}(x^2+1)y'' + xy' + y &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+1\right)a_n x^n \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\end{aligned}$$

تعريف

نقول إن نقطة a طبيعية شاذة بالنسبة للمعادلة التفاضلية

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

إذا كانت الدوال $A(x) = (x-a)a(x)$ و $B(x) = (x-a)^2 b(x)$ تحليلية عند النقطة a.

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية التالية

$$(x^2-4)^2 y'' + 3(x-2)y' + 5y = 0.$$

إذا كان $x \neq \pm 2$، فإن المعادلة تصبح $y'' + \frac{3}{(x-2)(x+2)^2} y' + \frac{5}{(x^2-4)^2} y = 0$.

في هذه الحالة النقطة 2 هي نقطة طبيعية شاذة بالنسبة للمعادلة التفاضلية و النقطة -2 هي نقطة شاذة.

مبرهنة فروبنيوس Frobenius' Theorem

إذا كانت a طبيعية شاذة بالنسبة للمعادلة التفاضلية ((1))، يوجد على الأقل حلا على الصيغة التالية:

$$y = x^r \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n \tag{2}$$

حيث r عدد ثابت. المتسلسلة تتقارب على الأقل على فترة $0 < x - a < R$.

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية التالية

$$3xy'' + y' - y = 0.$$

نبحث عن حل لهذه المعادلة التفاضلية على الصيغة $y = x^r \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$،
حيث $a_0 \neq 0$.