

متسلسلات القوى حولا لمعادلات تفاضلية خطية Series Solution of Linear Differential Equations

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

23 مارس 2020

المحتويات

1 متسلسلات القوى

2 متسلسلة حلول لمعادلات تفاضلية

3 حلول بجوار نقاط عادية

تعريف

متسلسلة القوى مركزها $a \in \mathbb{R}$ هي متسلسلة دوال

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x - a)^n$$

حيث $(a_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية.

نقول أن دالة $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ تحليلية عند النقطة $a \in I$ إذا وجد $r > 0$ بحيث

$$f(x) = \sum_0^{\infty} a_n (x - a)^n$$

لكل $x \in (a - r, a + r) \subset I$.

النقطة a يسمى كذلك نقطة عادية بالنسبة للدالة f .

إذا كانت الدالة f غير تحليلية عند النقطة a ، نقول أن النقطة a نقطة شاذة بالنسبة
للدالة f .
نقول إن دالة $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ تحليلية على فترة مفتوحة I إذا كانت تحليلية عند كل
نقطة في I .

في برنامج التحليل، نثبت أن لكل متسلسلة قوى، يوجد $R \in [0, +\infty]$ بحيث تكون متسلسلة القوى $\sum_{n \geq 0} a_n(x-a)^n$ متقاربة مطلقا على الفترة $(a-R, a+R)$ ، إذا كان

$R > 0$ و متقاربة عند النقطة $\{a\}$ إذا كان $R = 0$.

يسمى هذا العدد R نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى.

المتسلسلة تتقارب لكل x حيث $|x-a| < R$ و تتباعد لكل x حيث $|x-a| > R$.

كذلك $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ ، إذا كانت النهاية موجودة. كذلك $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}}$ ،

إذا كانت النهاية موجودة.

وفي الحالة العامة

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}}.$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n}, \quad |x| < 1.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1

2

3

4

5

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

مبرهنة

إذا كانت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ لكل $|x-a| < r$ ، فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة $(a-r, a+r)$ و

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

و a

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

نتيجة

إذا كانت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ for $|x-a| < r$ ، فإن الدالة f هي C^∞ على الفترة $(a-r, a+r)$ ، $f(a) = a_0$ و $a_n = \frac{f^{(n)}}{n!}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

المبرهنة التالية تثبت أنه إذا كانت معامل هذه المعادلة دوال تحليلية بجوار نقطة طبيعية a وإذا كان R أصغر نصف قطر التقارب لهذه الدوال فإن المعادلة التفاضلية الخطية لها حل كدالة تحليلية و نصف قطر تقارب بجوار النقطة a على الأقل R .

مبرهنة

إذا كانت a_1, \dots, a_n, f تحليلية عند النقطة a ، فإن حلول المعادلة التفاضلية

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f$$

تحليلية حيث نصف قطر التقارب سيكون على الأقل أصغر قطر التقارب للدوال
 a_1, \dots, a_n, f .

1 لتكن المعادلة التفاضلية $y'' - 2y = 0$.
معامل هذه المعادلة التفاضلية تحليلية. وبالتالي فإن كل حل لهذه المعادلة التفاضلية تحليلية.

إذا كانت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حل، فإن

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n.$$

$x \in \mathbb{R}$. ونستنتج أن $(n+1)(n+2)a_{n+2} = 2a_n$ لكل $n \geq 0$. وبالتالي فإن

$$a_{n+2} = \frac{2a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad \forall n \geq 0.$$

و نحصل على $a_{2n} = \frac{2^n a_0}{(2n)!}$, $a_{2n+1} = \frac{2^n a_1}{(2n+1)!}$ وبالتالي فإن

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = a_0 \cosh(\sqrt{2}x) + \frac{a_1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}x).$$

2 لتكن المعادلة التفاضلية التالية $y'' + xy = 0$.

إذا كانت $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ حلا لهذه المعادلة التفاضلية، فإن نصف قطر التقارب للمتسلسلة $R = +\infty$.

$$xy = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \text{ و } y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

و بالتالي فإن

$$\begin{aligned}
 y'' + xy &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n \\
 &= 2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_{n-1})x^n.
 \end{aligned}$$

إذاً $a_2 = 0$ و $(n+3)(n+2)a_{n+3} + a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
و باستعمال الإستقراء الرياضي نحصل على $a_{3n+2} = 0$ لكل $n \geq 0$

$$a_{3n} = \frac{a_0(-1)^n}{3n(3n-1)(3n-3)(3n-4) \dots 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2},$$

$$a_{3n+1} = \frac{a_1(-1)^n}{(3n+1) \cdot 3n(3n-2)(3n-3) \dots 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}.$$

$$\text{إذاً } y = a_0 y_1 + a_1 y_2 \text{ حيث } y_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} x^{3n} \text{ و}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n+1} x^{3n+1}.$$

تعريف

تكن المعادلة التفاضلية الخطية

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad 1$$

نقوا إن نقطة a عادية أو طبيعية بالنسبة للمعادلة التفاضلية (1) إذا كانت المعامل $\frac{b(x)}{a(x)}$

و $\frac{c(x)}{a(x)}$ تحليلية عند النقطة a .

إذا كانت النقطة غير عادية بالنسبة للمعادلة التفاضلية (1) فنقول أن النقطة a هي نقطة شاذة.

النقاط 1 و -1 هي النقاط الشاذة الوحيدة بالنسبة للمعادلة التفاضلية

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' + 6y = 0$$

مبرهنة

إذا كانت a نقطة عادية بالنسبة للمعادلة التفاضلية (1)، توجد دالتين تحليليتين بجوار النقطة a و مستقلة خطياً

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$$

هذه المتسلسلة متقاربة على الفترة $(a-R, a+R)$ ، حيث R هي المسافة بين a و أقرب نقطة شاذة (في \mathbb{C}) للمعادلة التفاضلية.

لتكن المعادلة التفاضلية التالية

$$(x^2 - 4x + 3)y'' + 2xy' + 6y = 0.$$

يوجد حلين مستقلين خطيا و حلولا لهذه المعادلة التفاضلية كمتسلسلة قوى بجوار 0 حيث يكون نصف قطر التقارب $R = 1$ ويوجد حلين مستقلين خطيا و حلولا لهذه المعادلة التفاضلية كمتسلسلة قوى بجوار 3 حيث يكون نصف قطر التقارب $R = 2$

تكن المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' + xy' + y = 0.$$

ولتكن متسلسلة قوى $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ حلا لهذه المعادلة التفاضلية.

$$y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \text{ و } y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' + xy' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$• a_{n+2} = -\frac{1}{n+2} a_n \text{ إذا } \dot{}$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} a_0, \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!} a_1.$$

الحلول المستقلة خطيا هي:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n} = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad y_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

تكن المعادلة التفاضلية التالية

$$(x^2 + 1)y'' + xy' + y = 0.$$

ولتكن متسلسلة قوى $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ حلا لهذه المعادلة التفاضلية.

$$y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n, \quad xy' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$$

$$(x^2 + 1)y'' + xy' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

تعريف

نقول إن نقطة a طبيعية شاذة بالنسبة للمعادلة التفاضلية

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

إذا كانت الدوال $A(x) = (x - a)a(x)$ و $B(x) = (x - a)^2b(x)$ تحليلية عند النقطة a .

لتكن المعادلة التفاضلية التالية

$$(x^2 - 4)^2 y'' + 3(x - 2)y' + 5y = 0.$$

إذا كان $x \neq \pm 2$ ، فإن المعادلة تصبح

$$y'' + \frac{3}{(x-2)(x+2)^2} y' + \frac{5}{(x^2-4)^2} y = 0.$$

في هذه الحالة النقطة 2 هي نقطة طبيعية شاذة بالنسبة للمعادلة التفاضلية و النقطة -2 هي نقطة شاذة.

مبرهنة فروبنوس Frobenius' Theorem

إذا كانت a طبيعية شاذة بالنسبة للمعادلة التفاضلية (1)، يوجد على الأقل حلا على الصيغة التالية:

$$y = x^r \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - a)^n \quad 2$$

حيث r عدد ثابت. المتسلسلة تتقارب على الأقل على فترة $0 < x - a < R$.

تكن المعادلة التفاضلية التالية

$$3xy'' + y' - y = 0.$$

نبحث عن حل لهذه المعادلة التفاضلية على الصيغة $y = x^r \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$ حيث $a_0 \neq 0$.