# الخصائص الأساسية للدوال الهولومرفية

د. المنجي بلال

18 جويلية 2017

# المحتويات

# باب 1

# الخصائص الأساسية للدوال الهولومرفية

## 1.1 متباينات كوشي و تطبيقاتها

### 1.1.1 متباينات كوشي

**مبرهنة 1.1.1**
لتكن $f$ دالة هولومرفية على مفتوح $\Omega \subset \mathbb{C}$. لكل $z_0 \in \Omega$ و $r > 0$ بحيث $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$، توجد متسلسلات القوى

$$\sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$$

تتقارب نحو $f$ على $D(z_0, r)$ و إذا كان $M_f(z_0, r) = \sup_{z \in \overline{D(z_0,r)}} |f(z)|$، نحصل على

$$|a_n| \leq \frac{M_f(z_0, r)}{r^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.1}$$

هذه المتباينات تسمى متباينات كوشي.

**البرهان**
باستعمال مبرهنة **??** (chapter IV)

$$a_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\mathrm{i}\theta}) e^{-\mathrm{i}n\theta} d\theta.$$

إذاً $|a_n| \leq \dfrac{M_f(z_0, r)}{r^n}$, بحيث $\gamma(t) = z_0 + re^{\mathrm{i}\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]$.

□

### 1.1.2 مبرهنة ليوفيل Liouville's Theorem

**نتيجة 1.1.2**
كل دالة هولومرفية و محدودة على $\mathbb{C}$ هي ثابتة.

**البرهان**
لتكن $f$ دالة هولومرفية محدودة على $\mathbb{C}$ و لتكن $M = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$. إذا كان $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$، إذاً متباينات كوشي $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ لكل $r > 0$ و كل $n \geq 1$.
بما أن لكل $n \geq 1$, $\lim_{r\to+\infty} \frac{M}{r^n} = 0$، فإنّ $a_n = 0$ لكل $n \geq 1$ و $f$ ثابت. □

### 1.1.3 مبرهنةدالمبار D'alembert's Theorem

**مبرهنة 1.1.3 ( D'Alembert's Theorem المبرهنة الأساية في الجبر )**
كل كثيرة حدود غير ثابتة لها صفر في $\mathbb{C}$.

هذه المبرهنة يعبر عنها بأنّ $\mathbb{C}$ مغلق جبريا. ($\mathbb{C}$ is algebraically closed).
للبرهان نحتاج المبرهنة التمهيدية التالية:

**مبرهنة تمهيدية 1.1.4**
لتكن $P$ كثيرة حدود بدرجة $n \geq 1$، $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$، إذاً يوجد $R > 0$ بحيث

$$\frac{|a_n||z|^n}{2} \leq |P(z)| \leq \frac{3|a_n||z|^n}{2}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \quad |z| \geq R. \tag{1.2}$$

**البرهان**
لكل $z \neq 0$، $P(z) = z^n \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right)$. باستعمال متباينة المثلث، نجد

$$|z|^n \left( |a_n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| \right) \leq |P(z)| \leq |z|^n \left( |a_n| + \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| \right).$$

ولكن $\lim_{|z|\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} = 0$، إذاً يوجد $R$ بحيث لكل $|z| \geq R$,
$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| \leq \frac{|a_n|}{2}$, ونتحصل على النتيجة

□

**البرهان لمبرهنة 1.1.3**
لتكن $P \in \mathbb{C}[X]$ كثيرة حدود غير ثابتة. إذا كانت $P$ ليس لها أصفار، تكون الدالة $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ هولومرفية على $\mathbb{C}$ و محدودة لأنّ $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$، إذًا $f$ ثابتة و $P$ ثابتة، و هذا تناقض.
□

**نتيجة 1.1.5**
كل كثيرة حدود بدرجة $n$ لها $n$ (ليس بالضرورة مختلفة) صفر.

نبره على النتيجة بالإستقراء الرياضي على درجة كثيرة حدود.

□

**نتيجة 1.1.6**
كل كثيرة حدود بدرجة $n$ تأخذ كل عدد مركب $n$ مرة كقيمة.

**البرهان**
إذا كانت $P$ كثيرة حدود بدرجة $n$ و $a \in \mathbb{C}$، إذًا كثيرة حدود $Q = P - a$ هي كثيرة حدود بدرجة $n$. باستعمال النتيجة 1.1.5، $Q$ لها $n$ صفر. □

# 1.2 خاصية القيمة المتوسطة و خاصية القيمة العظمى

## 1.2.1 خاصية القيمة المتوسطة

**تعريف 1.2.1**
نقول أن دالة متصلة $f$ معرفة على مجموعة مفتوحة $\Omega$ تحقق خاصية القيمة المتوسطة على $\Omega$، إذا كان لكل $a \in \Omega$ و كل $r > 0$ بحيث $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) d\theta.$$

**ملاحظة 1.2.1**
إذا كانت الدالة $f$ تحقق خاصية القيمة المتوسطة، فإن $\mathrm{Re}\, f$ و $\mathrm{Im}\, f$ تحقق كذلك خاصية القيمة المتوسطة.

**نظرية 1.2.1**
كل دالة هولومرفية معرفة على مجموعة مفتوحة $\Omega$ تحقق خاصية القيمة المتوسطة.

**البرهان**
لتكن $f \in \mathcal{H}(\Omega)$، $a \in \Omega$ و $r > 0$ بحيث $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$، باستعمال معادلة كوشي على الدائرة

$$f(a)=\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-a}dw=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})d\theta.$$

بحيث $\gamma(\theta)=a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$، $\theta\in[0,2\pi]$. □

### 1.2.2 مبرهنة القيمة العظمى

**تعريف 1.2.2**

1. لتكن $f$ دالة متصلة على مجموعة مفتوحة $\Omega$. نقول أن الدالة $f$ لها قيمة عظمى محلية في نقطة $a\in\Omega$ إذا وجد جوار $V\subset\Omega$ للنقطة $a$ بحيث $|f(z)|\leq|f(a)|$ لكل $z\in V$.
2. نقول أن الدالة $f$ تحقق قانون القيمة العظمى على $\Omega$ إذا كانت لكل قيمة عظمى محلية $a$ للدالة $f$، فإن الدالة $f$ ثابتة على جوار النقطة $a$.

**مبرهنة 1.2.1**
كل دالة تحقق خاصية القيمة المتوسطة على $\Omega$ تحقق قانون القيمة العظمى.
و كحالة خاصة كل دالة $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ تحقق قانون القيمة العظمى.

**البرهان**
لتكن $a$ قيمة عظمى محلية للدالة $f$ و ليكن $r>0$ بحيث $|f(z)|\leq|f(a)|$ لكل $z\in D(a,r)$.
• النتيجة بديهية إذا كانت $f(a)=0$.
• إذا كان $f(a)\neq0$، يمكن أن نفرض أن $f(a)>0$ (يكفي أن نأخذ الدالة $g(z)=f(z)\dfrac{\overline{f(a)}}{|f(a)|^2}$). لكل $s<r$،

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})d\theta\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a)-\operatorname{Re}f(a+s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})d\theta=0.$$

بما أن $\theta\longmapsto f(a)-\operatorname{Re}f(a+s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ هي دالة متصلة و موجبة و $s$ عشوائية، إذا $f(a)=\operatorname{Re}f(z)$، لكل $z\in D(a,r)$. و بما أن $|f(z)|\leq|f(a)|$ على القرص $D(a,r)$، إذًا $\operatorname{Im}f=0$ على القرص $D(a,r)$، و هذا يثبت أن الدالة $f$ ثابتة على القرص $D(a,r)$. إذًا لا يمكن للدالة $|f|$ أن تحقق قيمة عظمى محلية في نقطة في $\Omega$ إلا إذا كانت ثابتة. □

**مبرهنة 1.2.2** [قانون القيمة العظمى (الصيغة الثانية)]
ليكن $\Omega$ مجموعة مفتوحة و مترابطة و محدودة و لتكن $f\colon\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{C}$ دالة متصلة على $\overline{\Omega}$ و هولومرفية على $\Omega$. إذا كان $M=\sup\limits_{z\in\overline{\Omega}\setminus\Omega}|f(z)|$، إذًا $|f(z)|\leq M$ لكل $z\in\Omega$، وإذا وجد $a\in\Omega$ بحيث

$M = |f(a)|$، إذاً $f$ ثابتة على $\Omega$. (كذلك لا يمكن للدالة $|f|$ أن تحقق القيمة العظمى في نقطة داخلية إلا إذا كانت الدالة $f$ ثابتة.)

**البرهان**

لتكن $M' = \sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|$. بما أن $f$ متصلة على المتراص $\overline{\Omega}$، يوجد $a \in \overline{\Omega}$ بحيث $|f(a)| = M'$.

- إذا كان $a \in \Omega$، فإن الدالة $f$ ثابتة بجوار النقطة $a$، إذاً الدالة $f$ ثابتة على $\Omega$.
- إذا كان $a \notin \Omega$ و $|f(z)| < M'$ $\forall z \in \Omega$. $M'$ يتحقق في $\overline{\Omega} \setminus \Omega$، إذاً $M' = M$ و $|f(z)| < M$، $\forall\, z \in \Omega$.

□

**1.2.1 ملاحظات**

1. إذا كانت الدالة $f$ هولومرفية على الحلقة $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ \frac{1}{r} < |z| < R\}$ و متصلة على $\overline{\Omega}$، إذاً $f$ تحقق قيمتها العظمى على الحد $\mathscr{C}(0,r) \cup \mathscr{C}(0,R)$.

   مثلا الدالة $f(z) = z$ تحقق قيمها العظمى على الحد الخارجي $\mathscr{C}(0,R)$، و الدالة $g(z) = \dfrac{1}{z}$ تحقق قيمتها العظمى على الحد الداخلي $\mathscr{C}(0,r)$.

2. المبرهنة 1.2.2 ليست صحيحة ذا كان $\Omega$ غير محدود. فمثلا، الدالة $f(z) = e^z$ المعرفة على $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > 0\}$ تحقق ما يلي

   $|f(\mathrm{i}y)| = |e^{\mathrm{i}y}| = 1$، أي $f(\partial\Omega) \subset \mathscr{C}(0,1)$. و لكن $f(x) > 1$ على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة. إذاً محدودية المجموعة $\Omega$ أساسية في المبرهنة 1.2.2.

## 1.2.3 مبرهنة الدالة المفتوحة

**مبرهنة 1.2.3 (مبرهنة الدالة المفتوحة )**
كل دالة هولومرفية غير ثابتة معرفة على مجموعة مفتوحة و مترابطة هي مفتوحة.

**البرهان**

لتكن $f$ دالة هولومرفية غير ثابتة معرفة على مجموعة مفتوحة و مترابطة $\Omega$. لنفرض أن $0 \in \Omega$ و $f(0) = 0$. (إذا كانت $a \in \Omega$ و $f(a) = \alpha$، نأخذ الدالة $g(z) = f(a+z) - \alpha$). يكفي أن نثبت أن $f(\Omega)$ هو جوار لـ 0.

ليكن $r > 0$ بحيث $\overline{D(0,r)} \subset \Omega$ و $f(z) \neq 0$ لكل $z$ بحيث $|z| = r$. (يوجد عدد $r$ و إلا يكون

0 نقطة تراكمية لمجموعة أصفار الدالة $f$، و في هذه الحالة تكون الدالة $f$ الدالة الصفرية).
لتكن $m = \inf_{|z|=r} |f(z)| > 0$.
إذا كان $D(0,m) \subset f(\Omega)$ فالنتيجة بديهية، و إلا يوجد $w \in \mathbb{C}$ بحيث $|w| < m$ و $w \notin f(\Omega)$.
الدالة $\psi(z) = \dfrac{1}{f(z)-w}$ هي هولومرفية على $\Omega$ و

$$|\psi(0)| = \frac{1}{|w|} \leq \sup_{|z|=r} |\psi(z)| \leq \frac{1}{m-|w|}.$$

إذاً $\frac{m}{2} \geq |w|$. إذا كان $|w| < \frac{m}{2}$، $w \in f(\Omega)$ و $D(0, \frac{m}{2}) \subset f(\Omega)$. □

### 1.2.4 مبرهنة شوارتز The Schwarz's lemma

**مبرهنة 1.2.4 (مبرهنة شوارتز)**

لتكن $f$ دالة هولومرفية على قرص الوحدة $D$ حيث $f(0) = 0$ و $|f(z)| \leq 1$ لكل $z \in D$. إذاً $|f(z)| \leq |z|, \ \forall z \in D$ و $|f'(0)| \leq 1$.
كذلك إذا وجد $z \in D \setminus \{0\}$ بحيث $|f(z)| = |z|$ أو إذا كان $|f'(0)| = 1$، فإن $f$ تكون دوران (يعني يوجد $\lambda \in \mathbb{C}$، $|\lambda| = 1$ بحيث $f(z) = \lambda z$ لكل $z \in D$).

**البرهان**

الدالة $g$ المعرفة على $D$ بما يلي $\begin{cases} g(z) = \dfrac{f(z)}{z} & \text{if} \quad z \neq 0 \\ g(0) = f'(0) \end{cases}$ هي هولومرفية على $D \setminus \{0\}$ و متصلة على $D$، إذاً $g$ هولومرفية على القرص $D$. باستعمال مبرهنة القيمة العظمى بالنسبة للدالة $|z| \leq r < 1$، $|g(z)| \leq \sup_{|w|=r} |g(w)| = \frac{1}{r} \sup_{|w|=r} |f(w)| \leq \frac{1}{r}$.
هذا لكل عدد $r < 1$. بما أن $r$ عشوائي و يقترب من 1، نستنتج

$$|g(z)| \leq \lim_{r \to 1} \frac{1}{r} = 1 \ \ \forall z \in D.$$

هذا يثبت أن $|f(z)| \leq |z|$ و $|f'(0)| \leq 1$.
في حالة ما إذا كانت $|f'(0)| = 1$ أو $|f(a)| = |a|$ مع $a \in D \setminus \{0\}$، نستنتج أن $|g(a)| = 1$ أو $|g(0)| = 1$، إذاً الدالة $|g|$ تحقق قيمتها العظمى في نقطة داخلية في $D$، إذاً $g$ هي الدالة الثابتة.
□

**نتيجة 1.2.5**

لتكن $f\colon D(0,R)\longrightarrow\mathbb{C}$ دالة هولومرفية حيث $f^{(k)}(0)=0$ لكل $0\le k\le n-1$. إذا كان $|f(z)|\le M$ لكل $z\in D(0,R)$، إذاً

$$|f(z)|\le M\left(\frac{|z|}{R}\right)^n,\ \forall z\in D(0,R)$$

كذلك، إذا وجد $a\in D(0,R)\setminus\{0\}$ بحيث $|f(a)|=M\left(\frac{|a|}{R}\right)^n$، فإنه يوجد $\alpha\in\mathbb{R}$ بحيث $f(z)=M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\frac{z}{R}\right)^n$، لكل $z\in D(0,R)$.

**البرهان**

توجد دالة هولومرفية $g$ على $D(0,R)$ بحيث $f(z)=z^n g(z)$.

نستنتج النتيجة من مبرهنة القيمة العظمى بالنسبة للدالة $h(z)=\dfrac{g(Rz)R^n}{M}$.

□

**نتيجة 1.2.6**

لتكن $f$ تقابل هولومرفي لقرص الوحدة $D$ ( يعني: دالة هولومرفية و الدالة العكسية هولومرفية على قرص الوحدة)، بحيث $f(0)=0$، إذاً يوجد $\alpha\in\mathbb{R}$ بحيث $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z$، لكل $z\in D$.

**البرهان**

لتكن $g=f^{-1}$، إذاً $g(0)=0$، $g'(0)f'(0)=1$ و باستعمال مبرهنة شوارتز $|g'(0)|\le 1$ و $|f'(0)|\le 1$، إذاً $|g'(0)|=|f'(0)|=1$، و نستنتج أن $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z$، حيث $\alpha\in\mathbb{R}$. □

**ملاحظة 1.2.2**

لكل $a\in D$، نعرف الدالة $h_a(z)=\dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$.

$h_a(a)=0$، $h_a(0)=a$ و $\left|h_a(e^{\mathrm{i}\theta})\right|=\left|\dfrac{a-e^{\mathrm{i}\theta}}{1-\bar{a}e^{\mathrm{i}\theta}}\right|=\left|\dfrac{a-e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{-\mathrm{i}\theta}-\bar{a}}\right|=1$. إذاً $h_a$ هي تقابل هولومرفي لقرص الوحدة. الدالة $h_a\circ h_a$ تقابل هولومرفي لقرص الوحدة و $h_a\circ h_a(0)=0$، $h_a\circ h_a(a)=a$، إذاً $h_a\circ h_a=\mathrm{Id}$. كذلك إذا كانت الدالة $g$ تقابل هولومرفي لقرص الوحدة حيث $g(a)=0$، لعدد مركب $a\in D$، الدالة $f=g\circ h_a$ تقابل هولومرفي لقرص الوحدة حيث $f(0)=0$. إذاً $g(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}h_a(z)$.

هذا يحدد زمرة الدوال التقابل و الهولومرفية لقرص الوحدة.

## 1.3 مبرهنة التقارب

**مبرهنة تمهيدية 1.3.1**

ليكن $\Omega$ مفتوح في $\mathbb{C}$ و $K$ متراص في $\Omega$. إذا كان $r < \delta(K, \Omega^c)$، فإن لكل دالة هولومرفية $f$ على $\Omega$

$$\sup_{z\in K} |f'(z)| \leq \frac{1}{r} \sup_{z\in K_r} |f(z)|,$$

حيث $K_r = \{z \in \Omega;\ \delta(z, K) \leq r\}$.

هذه المبرهنة هي نتيجة نظرية تكامل كوشي على الدائرة.

**مبرهنة 1.3.2**

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال الهولومرفية على $\Omega$ و تتقارب بانتظام على كل متراص في $\Omega$ نحو دالة $f$.

إذاً الدالة $f$ هولومرفية على $\Omega$. كذلك المتتالية $(f'_n)_n$ تتقارب بانتظام على كل متراص في $\Omega$ نحو $f'$.

**نتيجة 1.3.3**

تحت نفس الفرضيات، لكل $k \in \mathbb{N}$، المتتالية $(f_n^{(k)})$ تتقارب بانتظام على كل متراص في $\Omega$ نحو $f^{(k)}$.

**برهان المبرهنة** 1.3.2

نستنتج من التقارب المنتظم في المبرهنة أن الدالة $f$ متصلة. و لإثبات أن الدالة $f$ هولومرفية، نستعمل مبرهنة Morera .

لكل مثلث مغلق $\Delta$ في $\Omega$، $\int_{\partial\Delta} f_n(z)\, dz = 0$ و باستعمال التقارب المنتظم $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)\, dz = \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz$، إذاً $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$

نستنتج من المبرهنة التمهيدية 1.3.1، أن المتتالية $(f'_n)_n$ تتقارب بانتظام على كل متراص $K$ في $\Omega$ نحو $f'$. $\square$

## 1.4 النقاط الشاذة للدوال الهولومرفية

في هذه الفقرة، نريد دراسة النقاط الشاذة المعزولة بالنسبة للدوال الهولومرفية.

**تعريف 1.4.1**

ليكن $\Omega$ مفتوح في $\mathbb{C}$ و $z_0 \in \Omega$. إذا كانت $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$، نقول أن $z_0$ هي نقطة شاذة معزولة بالنسبة للدالة $f$.

**مبرهنة 1.4.1**

ليكن $\Omega$ مفتوح في $\mathbb{C}$ و $f$ دالة هولومرفية على $\Omega \setminus \{z_0\}$، $z_0 \in \Omega$. إذا كانت الدالة $f$ محدودة في جوار $z_0$، فإن الدالة $f$ يمكن تمديدها على $\Omega$ كدالة هولومرفية.

**البرهان**

لتكن $g$ الدالة المعرفة على $\Omega$ كما يلي $g(z) = \begin{cases} (z-z_0)f(z) & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$.

بما أن الدالة $f$ محدودة بجوار $z_0$، $g$ متصلة. إذًا الدالة $g$ هولومرفية على $\Omega$. يوجد جوار $V$ للنقطة $z_0$ بحيث $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$، لكل $z \in V$. إذًا $f$ يمكن تمديدها على $V$ بالدالة $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n-1}$، $a_1 = g'(z_0)$.

□

**نتيجة 1.4.2**

لتكن $f$ دالة هولومرفية على $\Omega \setminus \{z_0\}$.

إذا كانت للدالة $f$ نقطة شاذة معزولة $z_0$ و محدودة بجوار $z_0$، إذًا $\lim_{z\to z_0} f(z)$ موجودة.

**تعريف 1.4.2**

لتكن $f$ دالة هولومرفية على $\Omega \setminus \{z_0\}$. إذا كانت $f$ قابلة للتمدد كدالة هولومرفية بجوار $z_0$، نقول أن $z_0$ هي نقطة شاذة قابلة للإزالة بالنسبة للدالة $f$.

**مبرهنة 1.4.3 (تصنيف النقاط الشاذة المعزولة بالنسبة للدوال الهولومرفية )**

لتكن $f$ دالة هولومرفية على $\Omega \setminus \{z_0\}$، $(z_0 \in \Omega)$. إذًا الدالة $f$ تحقق أحد الخصائص التالية

1. $z_0$ هي نقطة شاذة قابلة للإزالة بالنسبة للدالة $f$.
2. يوجد أعداد مركبة $a_{-m}$ ... $a_{-1}$، حيث $a_{-m} \neq 0$ و $z_0$ هي نقطة شاذة قابلة للإزالة بالنسبة للدالة $f(z) - \sum_{j=1}^{m} \frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j}$.
3. مهما كان $V$ جوارا للنقطة $z_0$، فإن $f(V)$ مجموعة كثيفة في $\mathbb{C}$.

بعبارة أخرى، لكل $r > 0$ بحيث $D(z_0, r) \subset \Omega$، $f(D(z_0\ r) \setminus \{z_0\})$ كثيف في $\mathbb{C}$.

**ملاحظات 1.4.1**

1. في الحالة الثانية، نقول أن $z_0$ هي قطب بدرجة $m$ بالنسبة للدالة $f$.

كثيرة الحدود بالنسبة للمتغيرة $\frac{1}{z-z_0}$، $\sum_{j=1}^{m} \frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j}$ تسمى الجزئ الأساسي للدالة $f$ في النقطة $z_0$. في هذه الحالة $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$.

في جوار النقطة $z_0$، الدالة $f(z)-\sum_{j=1}^{m}\frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j}$ نكتب كمتسلسلة القوى.

$$f(z)-\sum_{j=1}^{m}\frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k.$$

متسلسلة القوى $\sum_{k=-m}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$ تسمى متسلسلة لورانت *Laurent series expansion* بالنسبة للدالة $f$ في النقطة $z_0$.

2. في الحالة الثالثة، نقول أن $z_0$ هي نقطة شاذة أساسية بالنسبة للدالة $f$. في هذه الحالة $\lim_{z\to z_0}f(z)$ غير موجودة كعدد مركب أو ما لا نهائي. و بصفة عامة إذا كانت $z_0$ نقطة شاذة معزولة بالنسبة للدالة $f$ و إذا وجد عدد طبيعي $n$ بحيث $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)$ موجودة، فإن $z_0$ ليست نقطة شاذة أساسية.

**البرهان للمبرهنة 1.4.3**

ليكن $D^*(z_0,r)=D(z_0,r)\setminus\{z_0\}\subset\Omega$ و نفرض أن الحالة الثالة غير صحيحة.إذًا يوجد $b\in\mathbb{C}$ و $\varepsilon>0$ بحيث $f(D^*(z_0,r))\cap D(b,\varepsilon)=\emptyset$، و هذا متكافئ مع $|f(z)-b|\geq\varepsilon$، $\forall z\in D^*(z_0,r)$.

الدالة $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-b}$ هولومرفية على $D^*(z_0,r)$ و محدودة بالعدد $\frac{1}{\varepsilon}$، إذًا يمكن تمديد هذه الدالة كدالة هولومرفية على $D(z_0,r)$. سنرمز بهذه الدالة كذلك $g$.

إذا كان $g(z_0)\neq 0$، إذًا $z_0$ هي نقطة شاذة قابلة للإزالة بالنسبة للدالة $f(z)=b+\dfrac{1}{g(z)}$.

إذا كان $z_0$ هو صفر بالنسبة للدالة $g$ بتعدد $m$، إذًا $g(z)=(z-z_0)^m g_1(z)$، حيث $g_1$ دالة هولومرفية على $D(z_0\ r)$ و $g_1(z_0)\neq 0$. إذًا $f(z)=b+\dfrac{h(z)}{(z-z_0)^m}$، حيث $h$ هولومرفية على $D(z_0\ r)$. لتكن $h(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$ هي متسلسلات القوى للدالة $h$.

إذًا $f(z)=b+\dfrac{b_0}{(z-z_0)^m}+\ldots+\dfrac{b_m}{z-z_0}+\sum_{k=0}^{+\infty}b_{m+k}(z-z_0)^k$. □

**نتيجة 1.4.4**

نفرض أن الدالة $f$ لها نقطة شاذة أساسية $z_0$، إذًا لكل عدد مركب $a$، توجد متتالية $(z_n)_n$ بحيث $\lim_{n\to+\infty}z_n=z_0$ و $\lim_{n\to+\infty}f(z_n)=a$.

**ملاحظات 1.4.2**
نستنتج أنه إذا كانت الدالة $f$ هولومرفية على المجموعة مفتوحة $\Omega \setminus \{z_0\}$، $z_0 \in \Omega$، فإن

1. تكون النقطة $z_0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة إذا و إذا فقط إذا تكون الدالة $f$ محدودة بجوار $z_0$.
2. تكون النقطة $z_0$ قطب إذا و إذا فقط إذا $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.
3. تكون النقطة $z_0$ قطب بدرجة $m$ إذا و إذا فقط إذا $\lim_{z \to z_0} |(z-z_0)^m f(z)| = c$، حيث $c \in \mathbb{C}^*$.
4. تكون النقطة $z_0$ نقطة شاذة أساسية إذا و إذا فقط إذا، تكون الدالة $f$ غير محدودة على أي جوار للنقطة $z_0$ و $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$ غير موجودةفي $\mathbb{C} \cup \{+\infty\}$.

## 1.5 الدوال الميرومرفية

**تعريف 1.5.1**
نقول أن دالة $f$ معرفة على مفتوح $\Omega$ هي ميرومرفية إذا وجدت مجموعة مغلقة $A \subset \Omega$، بحيث تكون الدالة $f$ هولومرفية على $\Omega \setminus A$ و كل نقطة $a \in A$ هي قطب بالنسبة للدالة $f$.

إذا كان $A = \emptyset$، الدالة $f$ هولومرفية على $\Omega$.
المجموعة $A$ هي قابلة للعد، و ليس لها أي نقطة تراكمية في $\Omega$.

**مثال 1.5.1**
لتكن $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة هولومرفية على مجموعة مفتوحة و مترابطة $\Omega$ و $f$ ليست الدالة الصفرية، إذاً $\dfrac{1}{f}$ هي دالة ميرومرفية على $\Omega$. ($A = f^{-1}\{0\}$).

**تمرين 1.5.1**
أثبت أن مجموعة $\mathcal{M}(\Omega)$ الدوال الميرومرفية على $\Omega$ هو حقل.

**نظرية 1.5.1**
إذا كانت $f$ دالة ميرومرفية على مفتوح $\Omega$، فإن $f'$ هي أيضا دالة ميرومرفية، و $f$ و $f'$ لهما نفس مجموعة الأقطاب في $\Omega$.
إذا كانت $a$ قطب بدرجة $m$ بالنسبة للدالة $f$، فإن $a$ قطب بدرجة $(m+1)$ بالنسبة للدالة $f'$.

**تمرين 1.5.2**
إذا كانت $f$ دالة ميرومرفية على $\Omega$، فإن $\dfrac{f'}{f}$ هي دالة ميرومرفية و كل أقطابها بسيطة.

## 1.6 تمارين الباب الرابع

**تمرين 1 :**
لتكن $f$ دالة هولومرفية معرفة على مجال $\Omega$ في $\mathbb{C}$، و ليكن $z_0 \in \Omega$. نفرض أن $z_0$ هو صفر بدرجة $p$ بالنسبة للدالة $f$.
أثبت أن لكل $z \in D(z_0, R)$، $|f(z)| \leq \dfrac{|z-z_0|^p}{R^p} \sup\limits_{|w-z_0|=R} |f(w)|$. ($R > 0$ بحيث $\overline{D(z_0, R)} \subset \Omega$).

**تمرين 2 :**
لتكن $f$ دالة كلية (هولومرفية على $\mathbb{C}$).
أثبت أنه إذا كانت الدالة $f$ ليست الدالة ثابتة، فإن $f(\mathbb{C})$ كثيف في $\mathbb{C}$. (يمكن أن نأخذ الدالة $g(z) = \dfrac{1}{f(z)-\alpha}$، $\alpha \notin f(\mathbb{C})$).

**تمرين 3 :**
ليكن $\Omega = \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C};\ -\pi/2 < y < \pi/2\}$ و لتكن $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}$.
أوجد قيمة $\sup\limits_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$ و استنتج.

**تمرين 4 :**
لتكن $f$ دالة هولومرفية على القرص $D(0, R)$. نعرف $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$، لكل $r < R$.

1. أثبت أنه إذا كانت الدالة $f$ غير ثابتة، فإن الدالة $r \longmapsto M(r)$ تزايدية قطعا و متصلة.
2. أثبت أنه إذا وجد $0 < r < R$ بحيث تكون الدالة $\theta \longmapsto |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|$ ثابتة و إذا كان $f(z) \neq 0$ لكل $z \in D(0, R)$، فإن الدالة $f$ ثابتة.
3. أثبت أنه إذا كانت الدالة $f$ كلية (هولومرفية على $\mathbb{C}$) وإذا وجد $n \geq 1$ بحيث $\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{M(r)}{r^n} < +\infty$، فإن الدالة $f$ كثيرة حدود بدرجة أقل أو يساوي $n$.

**تمرين 5 :**
لتكن $f$ دالة كلية. و نفترض أنه توجد كثيرة حدود $P$ بدرجة $n$ بحيث $|f(z)| \leq |P(z)|$، $\forall |z| \geq R$.
أثبت أن الدالة $f$ هي كثيرة حدود بدرجة أقل أو يساوي $n$.

**تمرين 6 :**
لتكن $P$ كثيرة حدود غير ثابتة.

1. أثبت أن $\lim\limits_{|z|\longrightarrow+\infty}|P(z)|=+\infty$.

2. لتكن $(z_n)_n$ متتالية من الأعداد المركبة بحيث المتتالية $P(z_n)$ متقاربة. أثبت أن المتتالية $(z_n)_n$ محدودة.

3. أثبت أن $P(\mathbb{C})$ مفتوح و مغلق في $\mathbb{C}$ و استنتج مبرهنة دالومبرع D'Alembert's theorem (المبرهنة الأساسية في الجبر (Fundamental Theorem of Algebra).

**تمرين 7 :**
لتكن $f$ دالة هولومرفية على قرص الوحدة $D$ و متصلة على $\overline{D}$. نفرض أنه يوجد $0<\alpha<2\pi$ بحيث $f(e^{\mathrm{i}t})=0$، لكل $t\in[0,\alpha]$.
سنعطي طريقتين لإثبات أن $f\equiv 0$ على $D$.
لكل $n\in\mathbb{N}$ بحيث $n\alpha>2\pi$، نعرف الدالة $F$ بما يلي:

$$F(z)=f(z)f(ze^{\mathrm{i}\alpha})\dots f(ze^{\mathrm{i}n\alpha}).$$

1. (الطريقة الأولى) أثبت أن $F\equiv 0$ واستنتج أن $f\equiv 0$.

2. (الطريقة الثانية)
لتكن $h(z)=\mathrm{i}\dfrac{1+z}{1-z}$ المعرفة على $D$.
أ) أثبت أن $h$ يحول قرص الوحدة إلى نصف المستوي $\mathcal{H}^+=\{x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C};\ y>0\}$.
ب) أثبت أن الدالة $f\circ h^{-1}$ هولومرفية على $\mathcal{H}^+$ و متصلة على $\overline{\mathcal{H}^+}$.
ج) استعمل خاصية تناضر شوارتز Schwarz's symmetry property لإثبات أن $f\circ h^{-1}\equiv 0$ واستنتج أن $f\equiv 0$.

**تمرين 8 :**
لتكن $g$ دالة هولومرفية على $D(0,R)$.

1. أثبت أنه إذا كان $g(0)=0$ و $|g(z)|\leq M$ لكل $z\in D(0,R)$، فإن $|\dfrac{g(z)}{z}|\leq\dfrac{M}{R}$ و $|g'(0)|\leq\frac{M}{R}$.

2. أثبت أنه إذا وجد $z_0\in D^*(0,R)$ بحيث $|\dfrac{g(z_0)}{z_0}|=\dfrac{M}{R}$ أ, إذا كان $|g'(0)|=\frac{M}{R}$، فإن $g(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{M}{R}z$، حيث $\alpha$ عدد حقيقي.

3. استنتج أنه إذا كانت الدالة $g$ هولومرفية و تماثل ذاتي لقرص الوحدة و $g(0) = 0$، فإنه يوجد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث $g(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} z$.

**تمرين 9 :**
لتكن $f$ و $g$
دالتين هولومرفيتين على قرص الوحدة $D$ بحيث $f(0) = g(0)$، الدالة $g$ أحادية و $f(D) \subset g(D)$.
أثبت أن

1. $g^{-1} \circ f$ تحقق المبرهنة التمهيدية لشوارتز Schwarz's lemma.
2. توجد دالة هولومرفية $h$ على $D$ بحيث

$$|h(z)| \leq |z| \quad \text{and } f = g \circ h.$$

3. $|g'(0)| \leq |f'(0)|$، حيث تكون المساواة إذا و إذا فقط إذا وجد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث $h(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} z$.
4. $f(D(0,r)) \subset g(D(0,r))$ $\forall\ 0 < r < 1$ .

**تمرين 10 :**
لتكن $f \colon D \longrightarrow D$ دالة هولومرفية. نفترض أن الدالة $f$ لها نقطتين ثابتتين في $D$. أثبت أن $f = \mathrm{Id}$.

**تمرين 11 :**
أوجد كل النقطة الشاذة المعزولة للدوال التالية و حدد طبيعتها.

$$\mathrm{e}^{\cot \pi/z} \quad \sin(\mathrm{e}^{1/z}), \quad z^2 \sin \frac{z}{z+1} \quad z(\mathrm{e}^{1/z} - 1), \quad \frac{1-\cos z}{\sin^2 z}, \quad \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}.$$

**تمرين 12 :**
لتكن $f$ دالة هولومرفية على مجال $\Omega \subset \mathbb{C}$. نفترض أن $[\alpha, \beta] \cap f(\Omega) = \emptyset$، $\alpha \neq \beta$ في $\mathbb{C}$.

1. أثبت أن الدالة $h(z) = \dfrac{f(z) - \alpha}{f(z) - \beta}$ هولومرفية على $\Omega$ و $h(\Omega) \cap [-\infty, 0] = \emptyset$.
2. استنتج أن لكل $n \in \mathbb{N}$، توجد دالة هولومرفية $g_n$ بحيث، $h = g_n^n$ على $\Omega$.

**تمرين 13 :**
لتكن $f \in \mathcal{H}(D(a,r))$، حيث $a \in \mathbb{C}$ و $r > 0$.
نفترض أن الدالة $f$ ليس لها أصفار على $D(a,r)$.

1. أثبت أنه توجد $g \in \mathcal{H}(D(a,r))$ بحيث $e^g = f$.

لتكن $h$ دالة هولومرفية على $D(a,r)\setminus\{a\}$ بحيث $\operatorname{Re} h(z) > 0$، لكل $z \in D(a,r)\setminus\{a\}$.

2. أثبت أن $a$ ليست نقطة شاذة أساسية بالنسبة للدالة $h$.
3. أثبت أن $e^{-h}$ يمكن تمديدها كدالة هولومرفية على $D(a,r)$.
4. استنتج أن $h$ يمكن تمديدها كدالة هولومرفية على $D(a,r)$.

**تمرين 14 :**

1. لتكن $f$ دالة هولومرفية على $\mathbb{C}^*$. نفترض أن $f(D^*(0,1))$ كثيف في $\mathbb{C}$.

أ) أثبت أنه يمكن تمديد الدالة $f$ كدالة هولومرفية على $\mathbb{C}$.

ب) نفترض أنه توجد متتالية $(z_n)_n$ من الأعداد المركبة المختلفة في $D^*(0,1)$ بحيث $f(z_n) = 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

i) أثبت أن $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$.

ii) استنتج تحت هذا الشرط أن لكل $r > 0$، المجموعة $f(D^*(0,r))$ كثيفة في $\mathbb{C}$.

iii) أوجد مثال لهذه الحالة.

2. لتكن الدالة $g(z) = z + \frac{1}{z}$.

أثبت أن $g(D^*(0,1))$ كثيف في $\mathbb{C}$.

3. أثبت أن كل دالة هولومرفية محدودة على $\mathbb{C}^*$ هي ثابتة.

**تمرين 15 :**

لتكن $f$ دالة كلية (هولومرفية على $\mathbb{C}$) و أحادية $\{z \in \mathbb{C};\ |z| > 1\}$. نعرف الدالة $g(z) = f(\dfrac{1}{z})$.

1. أثبت أن الدالة $g$ هولومرفية و أحادية على $D \setminus \{0\}$.
2. أثبت أن لكل $r < 1$، $g(D(0,r) \setminus \{0\})$ ليس كثيف في $\mathbb{C}$.
3. استنتج أن $f(z) = az + b$، حيث $a \neq 0$.

**تمرين 16 :**

لكل $a \in \mathbb{C}$ و $r > 0$، نعرف

$$D(a,r)=\{z\in\mathbb{C};\ |z-a|<r\},\ \text{and}\qquad D^*(a,r)=\{z\in\mathbb{C};\ 0<|z-a|<r\}.$$

لتكن الدالة الهولومرفية $f$ على $D^*(a,r)$.

1. أ) أثبت أنه إذا كانت $a$ هي نقطة شاذة أساسية بالنسبة للدالة $f$، فإنه لا يوجد جوار $V$ للنقطة $a$ بحيث $f(V\setminus\{a\})\subset\{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Re}f(z)>0\}$.

ب) أثبت أنه إذا كانت $a$

قطب بالنسبة للدالة $f$ بدرجة $k$، $k\geq 1$، فإنه يمكن كتابة $f(z)=\dfrac{c}{(z-a)^k}(1+g(z))$،
حيث $c$ عدد ثابت و الدالة $g$ هولومرفية على $D(a,r)$، و تساوي 0
في النقطة $a$.

استنتج أنه كل جوار للنقطة $a$ يحتوي على نقاط $z$ بحيث $\operatorname{Re}f(z)<0$.

ج) استنتج مما سبق أنه إذا وجد جوار $V$ للنقطة $a$ بحيث $f(V\setminus\{a\})\subset\{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Re}z>0\}$، فإن $a$ هي نقطة شاذة قابلة للإزالة.

2. نفترض أنه يوجد جوار $V$ للنقطة $a$ و قطعة مستقيم $S=[\alpha,\beta]\subset\mathbb{C}$ بحيث $f(V\setminus\{a\})\cap S=\emptyset$. أثبت أن النقطة $a$ ليست نقطة شاذة أساسية بالنسبة للدالة $f$. (يمكن أن نعرف دالة هولومرفية $g$ بحيث $g^2(z)=\dfrac{f(z)-\alpha}{f(z)-\beta}$).

3. لتكن $a$ نقطة شاذة أساسية بالنسبة للدالة $f$.
أثبت أن لكل جوار $V$ للنقطة $a$، صورة $V\cap D^*(a,r)$ بالنسبة للدالة $\operatorname{Re}f$ بالنسبة للدالة $\mathbb{R}$ و صورته بالنسبة للدالة $\dfrac{\operatorname{Im}f}{\operatorname{Re}f}$ هي $\overline{\mathbb{R}}$.

**تمرين 17 :**

لكل $a,b\in D$، نعرف $\delta(a,b)=|\dfrac{b-a}{1-\bar{a}b}|$.

1. أثبت أن $\delta(a,b)<1$.
2. لتكن $f\colon D\longrightarrow D$ دالة هولومرفية.
أثبت أن $\delta(f(a),f(b))\leq\delta(a,b)$ لكل $a,b\in D$. (يمكن استعمال الدالة $h_a(z)=\dfrac{a-z}{1-\bar{a}z},\ k(z)=\dfrac{f(a)-z}{1-\overline{f(a)}z}=h_{f(a)}(z)$ و $g=k\circ f\circ h_a^{-1}$).

3. أ) أثبت أنه إذا كانت $f$ تقابل، فإن
$\delta(f(a), f(b)) = \delta(a, b)$ لكل $a, b \in D$.
ب) بالعكس، نفترض أنه يوجد $a, b \in D$ بحيث $a \neq b$ و $\delta(f(a), f(b)) = \delta(a, b)$.
أثبت أن $f$ هي تقابل.

**تمرين 18 :**
لتكن $f$ دالة هولومرفية على مجال $\Omega \subset \mathbb{C}$. نفترض أن $\overline{D} \subset \Omega$ و

$$|f(e^{i\theta})| = 1; \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

1. أثبت أنه إذا كانت الدالة $f$ ليس لها أصفار في $D$، فإن الدالة $f$ ثابتة على $\Omega$.
2. أ) أثبت أن عدد أصفار الدالة $f$ في $D$ محدود.
ب) استنتج أنه يوجد $z_1, \ldots, z_n$ في $D$ و $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ بحيث

$$f(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n} (\frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z})^{p_j} \quad \text{with } |\lambda| = 1.$$

3. أوجد كل الدوال الهولومرفية على $\mathbb{C}$ و التي تحقق الشرط (1.3).

**تمرين 19 :**

1. لتكن $f$ دالة هولومرفية على قرص الوحدة $D$ بحيث $\lim_{r\to 1} |f(re^{i\theta})| = 1$ بانتظام بالنسبة للمتغيرة $\theta \in \mathbb{R}$.
أ) أثبت أنه إذا كانت $f$ ليس لها أصفار في القرص $D$، فإن $|f| \equiv 1$.
ب) أثبت أن $f$ لها عدد منته من الأصفار في $D$.
ج) استنتج أنه يوجد $m \in \mathbb{N}$، $a_1, \ldots, a_n \in D^*$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث $f(z) = e^{i\alpha} z^m \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j} z}$.
2. استنتج أنه إذا كانت $f$ دالة هولومرفية على $\mathbb{C}$ بحيث $|f(z)| = 1$ لكل $|z| = 1$، فإنه يوجد $\alpha \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ بحيث $f(z) = e^{i\alpha} z^n$.

**تمرين 20 :**
لتكن $f$ دالة هولومرفية على القرص $R' > R > 0$ ,$D(0, R')$.

1. أثبت أنه إذا كان $|a| < R$، فإن

$$f(a) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\gamma f(z)(\frac{1}{z-a} + \frac{\bar{a}}{R^2 - \bar{a}z})dz,$$

حيث $\gamma(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$، $t \in [0, 2\pi]$.

2. استنتج أن لكل $r < R$،

$$f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(t-\theta) + r^2}dt.$$

3. إذا كان $U = \operatorname{Re} f$ و $V = \operatorname{Im} f$، نعرف على القرص $D(0, R)$، الدالة

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z}dt + \mathrm{i}V(0).$$

أثبت أن الدالة $g$ هولومرفية على القرص $D(0, R)$، $U = \operatorname{Re} g$ و $g \equiv f$ على $D(0, R)$.