# الفضاءات المتراصة Compact Spaces

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

12 نوفمبر 2019

# المحتويات

في هذا الفصل سنقوم بدراسة مفهوم التراص مع بداية التوبولوجي كان واضحا أن الفترة المغلقة ونظرية الاتصال المنتظم ولكن, . لها خاصية معينة وهي أساسية في إثبات نظرية القيم العظمى والصغر ولزمن طويل لم يكن واضحا كيفية صياغة هذه الخاصية للفضاءات التوبولوجية.

### تعريف

لتكن $X \neq \emptyset$ و $Y \subset X$ ولتكن $\mathcal{C} = \{A_k \subset X, k \in I\}$ تجمع من المجموعات الجزئية من $X$.
نقول إن $\mathcal{C}$ غطاء للمجموعة $Y$ إذا كان $Y \subset \cup_{k \in I} A_k$ و إذا كانت المجموعة $I$ منتهية، فنقول إن الغطاء منته.

فيما يلي نستعرض بعضا من الأمثلة.

# مثال

في $\mathbb{R}$، التجمع $\{(n, n+2);\ n \in \mathbb{Z}\}$ يمثل عطاء للمجموعة $\mathbb{R}$.

في $\mathbb{R}$، التجمع $\{(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2});\ n \in \mathbb{Z}\}$ لا يمثل عطاء للمجموعة $\mathbb{R}$.
لا توجد فترة تغطي $\frac{1}{2}$.

**تعريف**

لتكن $X \neq \emptyset$ و $Y \subset X$ ولتكن $\mathcal{C} = \{A_k \subset X, k \in I\}$ غطاء للمجموعة $Y$.
نقول إن التجمع $\mathcal{D} = \{B_k \subset X, k \in J\}$ غطاء جزئي من الغطاء $\mathcal{C}$ إذا تحقق:

1. $\mathcal{D}$ غطاء للمجموعة $Y$
2. $B_k \in \mathcal{C}$ لكل $k \in J$.

**تعريف**

ليكن $X$ فضاء توبولوجي و $\mathcal{C} = \{U_k \subset X, k \in I\}$ غطاء للفضاء $X$. إذا كانت $U_k$ مجموعة مفتوحة (مغلقة) في $X$ لكل $j \in I$، فإن $\mathcal{C}$ عندئذ يسمى غطاء مفتوح (مغلق) للفضاء $X$.

# مثال

ليكن $(X, \mathcal{I}_D)$ الفضاء المتقطع فإن التجمع $\mathcal{C} = \{\{x\};\ x \in X\}$ غطاء مفتوح للفضاء $X$.

**تعريف**

يقال إن الفضاء التوبولوجي $X$ فضاء متراص إذا وجد لكل غطاء مفتوح للفضاء $X$ غطاء جزئي منته.

# مثال

الفضاء المعتاد $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_U)$ غير متراص وذلك لأن الغطاء $\mathcal{C} = \{(n, n+2);\ n \in \mathbb{Z}\}$ ليس له غطاء جزئي منته.

# مثال

الفترة المفتوحة $(0,1)$ غير متراصة. التجمع $\mathcal{C} = \{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n});\ n \in \mathbb{Z}^+\}$ غطاء مفتوح للفترة $(0,1)$ و ليس له غطاء جزئي منته.

**تعريف**

الفضاء الجزئي $(A, \mathcal{I}_A)$ من الفضاء $X$ متراص إذا كان متراصا بالنسبة للتوبولوجي $\mathcal{I}_A$.

عند دراسة تراص فضاء جزئي علينا إثبات أن كل غطاء مفتوح من عناصر التوبولوجي الجزئي له غطاء جزئي منته, وحيث أن المعطى هو التوبولوجي على الفضاء, لذلك يلزم استخلاص التوبولوجي الجزئي أولا, وحيث أن هذا غير مستحب أحيانا. لذلك النظرية التالية تعفينا من ذلك وتربط بين تراص الفضاء الجزئي وتراصه بالنسبة للتوبولوجي على الفضاء.

**نظرية**

الفضاء الجزئي $(A, \mathcal{I}_A)$ من الفضاء التوبولوجي $(X, \mathcal{I}_X)$ متراص إذا وفقط إذا كان متراص بالنسبة للتوبولوجي $\mathcal{I}_X$.

**نظرية**

الفضاء الجزئي المغلق من فضاء متراص يكون متراصا.

**تمهيدية**

ليكن $X$ فضاء هاوزدورف. فإن لأي مجموعة متراصة $A$ في $X$ ولأي $x \in X$ بحيث $A \not\ni x$ توجد مجموعتين مفتوحتين ومنفصلتين $U$ و $V$ في $X$ بحيث أن $A \subset U$ و $x \in V$.

**نظرية**

كل مجموعة جزئية متراصة في فضاء هاوزدورف مغلقة.

نجمع النظريتان في النظرية التالية:

**نظرية**

في فضاء هاوزدورف المتراص الفضاء الجزئي مغلق إذا وفقط إذا كان متراص.

في هذا الفصل سنقوم بدراسة بعض خواص التراص ودراسة تراص جداء الفضاءات التوبولوجية.

**نظرية**

الصورة المتصلة لمجموعة متراصة تكون متراصة. أي إذا كانت $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة متصلة وكانت $A$ متراصة في $X$ فإن $f(A)$ متراصة في $Y$.

**نتيجة**

إذا كانت $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة متصلة وشاملة من الفضاء المتراص $X$ إلى الفضاء $Y$. فإن $Y$ متراص.

**نظرية**

إذا كانت $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة متصلة من الفضاء المتراص $X$ إلى فضاء هاوزدورف $Y$ فإن $f$ دالة مغلقة.

**نتيجة**

إذا كانت $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة أحادية و شاملة ومتصلة من الفضاء المتراص $X$ إلى فضاء هاوزدورف $Y$ فإن $f$ دالة تكافؤ توبولوجي.

**نظرية**

الجداء المنتهي $\prod_{j=1}^{n} X_j$ متراص إذا وفقط إذا كان كل من $X_1, \ldots X_n$ متراص.

نثبت صحة النظرية باستخدام الاستقراء الرياضي.

الهدف الرئيس لهذا الفصل تزويدنا بتصنيف بسيط للمجموعات الجزئية المتراصة في $\mathbb{R}^n$. سنفترض أن القارئ ملم بنظرية هاين- بوريل في $\mathbb{R}$ . والتي تنص على أن المجموعة الجزئية في $\mathbb{R}$ متراصة إذا وفقط إذا كانت مغلقة و محدودة. سنقوم بتعميم هذه النظرية للفضاء $\mathbb{R}^n$ كما نعطي تعميما للقيم العظمى والصغرى على فضاء متراص.

**نظرية**

تكون مجموعة جزئية $A \subset \mathbb{R}^n$ متراصة إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة.

**نظرية**

إذا كانت $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة من فضاء متراص إلى الفضاء المعتاد $\mathbb{R}$ فإن $f$ تأخذ قيمها العظمى والصغرى على $X$ أي، توجد نقطتان $a$ و $b$ في $X$ بحيث $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ لكل $x \in X$.