الفضاءات المتراصة Compact Spaces

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

14 مارس 2020

المحتويات

في هذا الفصل سنقوم بدراسة مفهوم التراص مع بداية التوبولوجي كان واضحا أن الفترة المغلقة ونظرية الاتصال المنتظم ولكن, . لها خاصية معينة وهي أساسية في إثبات نظرية القيم العظمى والصغر ولزمن طويل لم يكن واضحا كيفية صياغة هذه الخاصية للفضاءات التوبولوجية.

تعريف

لتكن $X \neq \emptyset$ و $Y \subset X$ ولتكن $\mathcal{C} = \{A_k \subset X, k \in I\}$ تجمع من المجموعات الجزئية من X.
نقول إن $\mathcal{C}$ غطاء للمجموعة Y إذا كان $Y \subset \cup_{k \in I} A_k$ و إذا كانت المجموعة I منتهية، فنقول إن الغطاء منته.

فيما يلي نستعرض بعضا من الأمثلة.

مثال

في $\mathbb{R}$، التجمع $\{(n, n+2);\ n \in \mathbb{Z}\}$ يمثل غطاء للمجموعة $\mathbb{R}$.
في $\mathbb{R}$، التجمع $\{(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2});\ n \in \mathbb{Z}\}$ لا يمثل عطاء للمجموعة $\mathbb{R}$.
لا توجد فترة تغطي $\frac{1}{2}$.

تعريف

لتكن $X \neq \emptyset$ و $Y \subset X$ ولتكن $\mathcal{C} = \{A_k \subset X, k \in I\}$ غطاء للمجموعة Y.
نقول إن التجمع $\mathcal{D} = \{B_k \subset X, k \in J\}$ غطاء جزئي من الغطاء $\mathcal{C}$ إذا تحقق:

1. $\mathcal{D}$ غطاء للمجموعة Y
2. $B_k \in \mathcal{C}$ لكل $k \in J$.

تعريف

ليكن X فضاء توبولوجي و $\mathcal{C} = \{U_k \subset X, k \in I\}$ غطاء للفضاء X. إذا كانت U_k مجموعة مفتوحة (مغلقة) في X لكل $j \in I$، فإن $\mathcal{C}$ عندئذ يسمى غطاء مفتوح (مغلق) للفضاء X.

مثال

ليكن $(X, \mathcal{I}_D)$ الفضاء المتقطع فإن التجمع $\mathcal{C} = \{\{x\};\ x \in X\}$ غطاء مفتوح للفضاء X.

تعريف

يقال إن الفضاء التوبولوجي X فضاء متراص إذا وجد لكل غطاء مفتوح للفضاء X غطاء جزئي منته.

مثال

الفضاء المعتاد $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_U)$ غير متراص وذلك لأن الغطاء $\mathcal{C} = \{(n, n+2);\ n \in \mathbb{Z}\}$ ليس له غطاء جزئي منته.

مثال

الفترة المفتوحة $(0,1)$ غير متراصة. التجمع $\mathcal{C} = \{(\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n});\ n \in \mathbb{Z}^+\}$ غطاء مفتوح للفترة $(0,1)$ و ليس له غطاء جزئي منته.

تعريف

الفضاء الجزئي $(A, \mathcal{I}_A)$ من الفضاء X متراص إذا كان متراصا بالنسبة للتوبولوجي $\mathcal{I}_A$.

عند دراسة تراص فضاء جزئي علينا إثبات أن كل غطاء مفتوح من عناصر التوبولوجي الجزئي له غطاء جزئي منته, وحيث أن المعطى هو التوبولوجي على الفضاء, لذلك يلزم استخلاص التوبولوجي الجزئي أولا, وحيث أن هذا غير مستحب أحيانا. لذلك النظرية التالية تعفينا من ذلك وتربط بين تراص الفضاء الجزئي وتراصه بالنسبة للتوبولوجي على الفضاء.

نظرية

الفضاء الجزئي $(A, \mathcal{I}_A)$ من الفضاء التوبولوجي $(X, \mathcal{I}_X)$ متراص إذا وفقط إذا كان متراص بالنسبة للتوبولوجي $\mathcal{I}_X$.

نظرية

الفضاء الجزئي المغلق من فضاء متراص يكون متراصا.

تمهيدية

ليكن X فضاء هاوزدورف. فإن لأي مجموعة متراصة A في X ولأي $x \in X$ بحيث $x \notin A$ توجد مجموعتين مفتوحتين ومنفصلتين U و V في X بحيث أن $A \subset U$ و $x \in V$.

نظرية

كل مجموعة جزئية متراصة في فضاء هاوزدورف مغلقة.

نجمع النظريتان في النظرية التالية:

نظرية

في فضاء هاوزدورف المتراص الفضاء الجزئي مغلق إذا وفقط إذا كان متراص.

في هذا الفصل سنقوم بدراسة بعض خواص التراص ودراسة تراص جداء الفضاءات التوبولوجية.

نظرية

الصورة المتصلة لمجموعة متراصة تكون متراصة. أي إذا كانت $Y \longrightarrow X :f$ دالة متصلة وكانت A متراصة في X فإن $f(A)$ متراصة في Y.

نتيجة

إذا كانت $Y \longrightarrow X :f$ دالة متصلة وشاملة من الفضاء المتراص X إلى الفضاء Y. فإن Y متراص.

نظرية

إذا كانت $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة متصلة من الفضاء المتراص X إلى فضاء هاوزدورف Y فإن f دالة مغلقة.

نتيجة

إذا كانت $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة أحادية و شاملة ومتصلة من الفضاء المتراص X إلى فضاء هاوزدورف Y فإن f دالة تكافؤ توبولوجي.

نظرية

الجداء المنتهي $\prod_{j=1}^{n} X_j$ متراص إذا وفقط إذا كان كل من $X_1, \dots X_n$ متراص.

نثبت صحة النظرية باستخدام الاستقراء الرياضي.

الهدف الرئيس لهذا الفصل تزويدنا بتصنيف بسيط للمجموعات الجزئية المتراصة في $\mathbb{R}^n$. سنفترض أن القارئ ملم بنظرية هاين- بوريل في $\mathbb{R}$. والتي تنص على أن المجموعة الجزئية في $\mathbb{R}$ متراصة إذا وفقط إذا كانت مغلقة و محدودة. سنقوم بتعميم هذه النظرية للفضاء $\mathbb{R}^n$ كما نعطي تعميما للقيم العظمى والصغرى على فضاء متراص.

نظرية

تكون مجموعة جزئية $A \subset \mathbb{R}^n$ متراصة إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة.

نظرية

إذا كانت $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة من فضاء متراص إلى الفضاء المعتاد $\mathbb{R}$ فإن f تأخذ قيمها العظمى والصغرى على X أي، توجد نقطتان a و b في X بحيث $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ لكل $x \in X$.

هناك صياغة أخرى لمفهوم التراص. في هذا الفصل ندرس نوعين آخرين من التراص، ألا وهما التراص بنقطة النهاية وهو بشكل عام أضعف من مفهوم التراص الذي قدمناه، كما نقدم نوعا ثالثا وهو التراص بالمتتاليات, وسنرى كيفية علاقة الأنواع الثلاثة ببعضها. كذلك نثبت أن الأنواع الثلاث متكافئة في الفضاءات المترية.

تعريف

ليكن X فضاء توبولوجي, يقال أن X متراص بنقطة النهاية (Limit Point Compact) إذا كان لكل مجموعة غير منتهية A في X نقطة نهاية تنتمي إلى X.

مثال

الفضاء الجزئي $X = (0,1) \subset \mathbb{R}$ غير متراص بنقطة النهاية.
المجموعة الجزئية $\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$ ليس لها نقطة نهاية في X.

نظرية

كل فضاء متراص يكون متراص بنقطة النهاية.

فيما يلي نعرف نوعاً آخر من التراص والمعروف بالتراص بالمتتاليات.

تعريف

يقال أن الفضاء التوبولوجي X متراص بالمتتاليات إذا وجد لكل متتالية $(x_n)_n$ في X متتالية جزئية متقاربة في X.

مثال

الفضاء الجزئي $X = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ غير متراص بالمتتاليات. المتتالية $(\frac{1}{n})_n$ في X تتقارب من الصفر وبالتالي أي متتالية جزئية منها تتقارب أيضاً من الصفر ولكن $X \not\ni 0$. إذاً X غير متراص بالمتتاليات.

نظرية

إذا كان X متراص بالمتتاليات فإنه متراص بنقطة النهاية.

نظرية

ليكن X فضاء هاوزدورف و A مجموعة جزئية من X. فإن النقطة x في X نقطة نهاية للمجموعة A إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوي x تحوي عدد غير منته من عناصر A.

النظرية التالية توضح أن عكس نظرية صحيح للفضاءات المترية.

نظرية

الفضاء المتري المتراص بنقطة النهاية متراص بالمتتاليات.

نظرية (تمهيدية عدد ليبييج)

(Lebesgue number lemma) ليكن $\mathcal{C}$ غطاء مفتوح للفضاء المتري X. إذا كان X متراص، عندئذ يوجد عدد حقيقي موجب r بحيث أي مجموعة جزئية A من X قطرها أصغر من r محتواه في عنصر من عناصر $\mathcal{C}$.

نظرية

ليكن X فضاء متري فإن التالية متكافئة:

1. X متراص.
2. X متراص بنقطة النهاية.
3. X متراص بالمتتاليات.

تمرين 1 :
ليكن X فضاء توبولوجي. أثبت ما يلي
أ)إذا كان X فضاء متراص بنقطة النهاية وإذا كان A فضاء جزئي مغلق من X، اثبت أن A فضاء متراص بنقطة النهاية.
ب) إذا كان A فضاء جزئي مغلق من X و كان B فضاء جزئي مغلق من X متراص بنقطة النهاية. أثبت أن $A \cap B$ متراص بنقطة النهاية.

تمرين 2 :
أثبت أن الصورة المتصلة لفضاء متراص بالمتتاليات يكون متراص بالمتتاليات.

تمرين 3 :
إذا كانت $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة متصلة وشاملة من فضاء توبولوجي متراص بالمتتاليات X إلى فضاء توبولوجي Y، فإن Y متراص بالمتتاليات.

تمرين 4 :
أثبت أن خاصية التراص بالمتتاليات توبولوجية.

تمرين 5 :
أثبت أن المجموعة الجزئية المغلقة في فضاء متراص بالمتتاليات تكون متراصة بالمتتاليات.

تمرين 6 :
أثبت أن الصورة المتصلة لفضاء متراص بنقطة النهاية ليست بالضرورة متراصة بنقطة النهاية.

تمرين 7 :
أثبت أن المجموعة الجزئية المغلقة في فضاء متراص بنقطة النهاية تكون متراصة بنقطة النهاية.