الأنظمة الخطية للمعادلات التفاضلية Systems of Linear of First-Order Dffierential Equations

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

13 نوفمبر 2019

المحتويات

في هذا الفصل نعطي مقدمة للأنظمة الخطية للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى. الشكل العام لهذا النظام هو

$$\frac{dX}{dx}(x) = A(x)X(x) + F(x),$$

حيث $X(x) = \begin{pmatrix} x_1(x) \\ \vdots \\ x_n(x) \end{pmatrix}$، $A(x) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & \cdots & a_{1,n}(x) \\ a_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & \cdots & a_{2,n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}(x) & a_{n,2}(x) & \cdots & a_{n,n}(x) \end{pmatrix}$،

$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$.

إذا كانت $F = 0$، يسمى النظام متجانس، وإلا فإنه غير متجانسة.

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^x + \cos x.$$

هذه المعادلة يمكن تحويلها إلى نظام معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى كما يلي:

$y_1 = y$ و $y_2 = y'$، و بالتالي $\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -6y_1 + 5y_2 + e^x + \cos x \end{cases}$.

مبرهنة

إذا كانت المصفوفات $A(x)$ و $F(x)$ متصلة على الفترة المفتوحة I. فإن لكل $x_0 \in I$، يوجد حل وحيد على الفترة I للنظام الخطي $X'(x) = A(x)X(x) + F(x)$ حيث $X(x_0) = X_0$.

ليكن النظام الخطي المتجانس $X'(x) = A(x)X(x)$.

مبرهنة

إذا كانت $X_1, \ldots, X_m$ حلول للنظام الخطي $X'(x) = A(x)X(x)$ على الفترة I، فإن التركيب الخطي $a_1X_1 + \ldots + a_mX_m$ حل كذلك للنظام الخطي على الفترة I.

تعريف

ليكن $S = \{X_1, \ldots, X_m\}$ مجموعة من الحلول للنظام الخطي $X'(x) = A(x)X(x)$ على فترة I. نقول إن المجموعة S مرتبطة خطيا، إذا وجدت $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$، ليست كلها صفر بحيث

$$c_1 X_1(x) + \ldots + c_m X_m(x) = 0$$

لكل $x \in I$. خلاف ذلك ، تسمى المجموعة مستقلة خطيا.

مبرهنة

ليكن $X_1(x) = \begin{pmatrix} x_{1,1}(x) \\ \vdots \\ x_{1,n}(x) \end{pmatrix}, \dots, X_n(x) = \begin{pmatrix} x_{n,1}(x) \\ \vdots \\ x_{n,n}(x) \end{pmatrix}$ حلول للنظام الخطي $X'(x) = A(x)X(x)$ على الفترة I. إذاً المجموعة $S = \{X_1, \dots, X_n\}$ مستقلة خطيا على الفترة I إلا و إذا كان الفرنسكيان Wronskian

$$W(X_1, \dots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

لكل $x \in I$.

تعريف

كل مجموعة متكونة من n حل للنظام المتجانس $X'(x) = A(x)X(x)$ و مستقلة خطيا تسمى مجموعة أساسية من الحلول للنظام.

مبرهنة

لكل نظام خطي متجانس من المعادلات التفاضلية، توجد مجموعة أساسية من الحلول لهذا النظام.

مبرهنة

لتكن $X_1, \ldots, X_n$ مجموعة أساسية من الحلول للنظام المتجانس $X'(x) = A(x)X(x)$ على فترة I. إذاً الحل العام لهذا النظام الخطي يكون تركيبا خطيا لهذه المجموعة: $X(x) = c_1X_1(x) + \ldots + c_nX_n(x)$، حيث $c_1, \ldots, c_n$ أعدادا حقيقية.

الأنظمة الغير المتجانسة

مبرهنة

ليكن X_p حلا خاصا للنظام الغير متجانس على فترة I و ليكن $X_c(x) = c_1 X_1(x) + \ldots + c_n X_n(x)$، الحل العام للمعادلة المتجانسة. إذاً الحل العام للمعادلة الغير المتجانسة على الفترة I يكون على النحو التالي:

$$X(x) = X_c(x) + X_p.$$

القيم و الإتجاهات المميزة

تعريف

نقول أن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A إذا وجد $X \in \mathbb{R}^n$ و $X \neq 0$ بحيث $AX = \lambda X$ و في هذه الحالة يسمى X متجه مميز بالنسبة للقيمة المميزة λ.

مبرهنة

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و $\lambda \in \mathbb{R}$. فإن λ قيمة مميزة للمصفوفة A إلا وإذا كان $|\lambda I - A| = 0$.

تعريف

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة فإن
$|\lambda I - A| = 0$ يسمى كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A.

مثال

أوجد القيم المميزة للمصفوفات التالية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$