الأنظمة الخطية للمعادلات التفاضلية Systems of Linear of First-Order Dffierential Equations

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

29 مارس 2020

المحتويات

في هذا الفصل نعطي مقدمة للأنظمة الخطية للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى. الشكل العام لهذا النظام هو

$$\frac{dX}{dt}(t) = A(t)X(t) + F(t)$$

حيث $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ ، $A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \cdots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix}$,

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

إذا كانت $F = 0$، يسمى النظام متجانس، وإن لم يكن كذلك فيسمى غير متجانس.

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^x + \cos x.$$

هذه المعادلة يمكن تحويلها إلى نظام معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى كما يلي:

$y_1 = y$، $y_2 = y'$ و بالتالي $\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -6y_1 + 5y_2 + e^x + \cos x \end{cases}$.

مبرهنة

إذا كانت المصفوفات $A(t)$ و $F(t)$ متصلة على الفترة المفتوحة I. فإن لكل $t_0 \in I$، يوجد حل وحيد على الفترة I للنظام الخطي $X'(t) = A(t)X(t) + F(t)$ حيث $X(t_0) = X_0$.

ليكن النظام الخطي المتجانس $X'(t) = A(t)X(t)$.

مبرهنة

إذا كانت $X_1, \ldots, X_m$ حلولا للنظام الخطي $X'(t) = A(t)X(t)$ على الفترة I، فإن التركيب الخطي $a_1X_1 + \ldots + a_mX_m$ حل كذلك للنظام الخطي على الفترة I.

تعريف

لتكن $S = \{X_1, \ldots, X_m\}$ مجموعة من الحلول للنظام الخطي $X'(t) = A(t)X(t)$ على فترة I. نقول إن المجموعة S مرتبطة خطيا، إذا وجدت $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$، ليست كلها صفر بحيث

$$c_1 X_1(t) + \ldots + c_m X_m(t) = 0$$

لكل $x \in I$. خلاف ذلك ، تسمى المجموعة مستقلة خطيا.

مبرهنة

لتكن $X_n(t) = \begin{pmatrix} x_{n,1}(t) \\ \vdots \\ x_{n,n}(t) \end{pmatrix}, \ldots, X_1(t) = \begin{pmatrix} x_{1,1}(t) \\ \vdots \\ x_{1,n}(t) \end{pmatrix}$ حلولا للنظام الخطي
$X'(t) = A(t)X(t)$ على الفترة I.
المجموعة $S = \{X_1, \ldots, X_n\}$ مستقلة خطيا على الفترة I إلا و إذا كان الفرنسكيان
Wronskian

$$W(X_1, \ldots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \ldots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \ldots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \ldots & x_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

لكل $x \in I$.

تعريف

كل مجموعة متكونة من n حل للنظام المتجانس $X'(t) = A(t)X(t)$ و مستقلة خطيا تسمى مجموعة أساسية من الحلول للنظام.

مبرهنة

لكل نظام خطي متجانس من المعادلات التفاضلية، توجد مجموعة أساسية من مجموع حلول النظام.

مبرهنة

لتكن $X_1, \ldots, X_n$ مجموعة أساسية من الحلول للنظام المتجانس $X'(t) = A(t)X(t)$ على فترة I. الحل العام لهذا النظام الخطي يكون تركيبا خطيا لهذه المجموعة:
$X(t) = c_1X_1(t) + \ldots + c_nX_n(t)$، حيث $c_1, \ldots, c_n$ أعدادا حقيقية.

الأنظمة الغير المتجانسة

مبرهنة

ليكن X_p حلا خاصا للنظام الغير متجانس على فترة I و ليكن $X_c(t) = c_1 X_1(t) + \ldots + c_n X_n(t)$، الحل العام للمعادلة المتجانسة. إذاً الحل العام للنظام الغير المتجانسة على الفترة I يكون على النحو التالي:

$$X(t) = X_c(t) + X_p.$$

القيم و الإتجاهات المميزة

تعريف

نقول أن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A إذا وجد $X \in \mathbb{R}^n$ و $X \neq 0$ بحيث $AX = \lambda X$ و في هذه الحالة يسمى X متجه مميز بالنسبة للقيمة المميزة λ.

مبرهنة

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و $\lambda \in \mathbb{R}$. فإن λ قيمة مميزة للمصفوفة A إلا وإذا كان $|\lambda I - A| = 0$.

تعريف

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة فإن $|\lambda I - A| = 0$ يسمى كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A.

مثال

أوجد القيم المميزة للمصفوفات التالية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

في ما يلي سندرس فقط الأنظمة الخطية للمعادلات التفاضلية $X' = AX$ حيث $A \in M_2(\mathbb{R})$.

لدراسة هذه الأنظمة، نجد ثلاث حالات

الحالة الأولى: المصفوفة A لها قيمتين مميزتين مختلفتين في $\mathbb{R}$.

الحالة الثانية: المصفوفة A لها قيمة مميزة وحيدة في $\mathbb{R}$.

الحالة الأولى: المصفوفة A لها قيمتين مميزتين مختلفتين في $\mathbb{C}$.

الحالة الأولى: المصفوفة A لها قيمتين مميزتين مختلفتين λ_1, λ_2 في $\mathbb{R}$. في هذه الحالة $\{e^{\lambda_1 t}X_1, e^{\lambda_2 t}X_2\}$ تمثل مجموعة أساسية من الحلول، حيث X_1 و X_2 متجهين مميزين للمصفوفة بالنسبة للقيمة المميزة λ_1, λ_2 على التوالي.

مثال

إذا كانت المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$، $\lambda_1 = 1$، $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$، $\lambda_2 = 3$، $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ و الحل العام للنظام الخطي للمعادلات التفاضلية $X' = AX$ هو

$$X = ae^{t}X_1 + be^{3t}X_2 = \begin{pmatrix} ae^{t} + be^{3t} \\ ae^{t} - be^{3t} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

إذا كان $X_0 = X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ فإن $a = 0$، $b = 1$ و

$$X = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix}$$

الحالة الثانية: المصفوفة A لها قيمة مميزة وحيدة λ في $\mathbb{R}$ و $A \neq \lambda I$. في هذه الحالة نأخذ X_2 حيث $(A-\lambda I)X_2 \neq 0$ و $X_1 = (A-\lambda I)X_2$. و بالتالي يكون الحل العام $X = (at+b)e^{\lambda t}X_1 + ae^{\lambda t}X_2$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$.

مثال

إذا كانت المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. $\lambda = 1$ هي القيمة المميزة الوحيدة للمصفوفة.

إذا كان $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$، فإن $X_1 = (A - I)X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

و الحل العام للنظام الخطي للمعادلات التفاضلية $X' = AX$ يكون

$$X = (at + b)e^t X_1 + ae^t X_2 = e^t \begin{pmatrix} 2at + 2b + a \\ 2at + 2b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

إذا كان $X_0 = X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ فإن $a = 2$, $b = -\frac{1}{2}$ و

$$X = e^t \begin{pmatrix} 4t + 1 \\ 4t - 1 \end{pmatrix}.$$

الحالة الثالثة: المصفوفة A لها قيمتين مميزتين مختلفتين $\lambda_1 = a + \mathrm{i}b$ و $\lambda_1 = a - \mathrm{i}b$ في $\mathbb{C}$.
إذا كان $X_1 = V_1 + \mathrm{i}\, V_2$ متجه مميز بالنسبة للقيمة المميزة λ_1 فإن $X_2 = V_1 + \mathrm{i}\, V_2$ متجه مميز بالنسبة للقيمة المميزة λ_2.
في هذه الحالة تكون المجموعة

$$\{e^{at}(\cos(bt)\, V_1 - \sin(bt)\, V_2), e^{at}(\sin(bt)\, V_1 + \cos(bt)\, V_2)\}$$

مجموعة أساسية من الحلول.

مثال

إذا كانت المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$، $\lambda_1 = 2 + \mathrm{i}$، $\lambda_2 = 2 - \mathrm{i}$ هي القيم المميزة للمصفوفة.

إذا كان $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$، فإن $AX_1 = \lambda_1 X_1$.

في هذه الحالة $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

الحل العام للنظام الخطي للمعادلات التفاضلية $X' = AX$ هو

$$\begin{aligned} X &= ae^{2t}(\cos t V_1 - \sin t V_2) + be^{2t}(\sin t V_1 + \cos t V_2) \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} a\cos t + b\sin t \\ b\cos t - a\sin t \end{pmatrix}, \quad a, b\mathbb{R} \end{aligned}$$

إذا كان $X_0 = X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ فإن $a = 1$, $b = -1$ و

$$X = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

الأنظمة الخطية الغير متجانسة من المعادلات الخطية

ليكن نظاما خطيا غير متجانس من المعادلات الخطية $X'(t) = AX(t) + B(t)$. إذا كانت $\{Y_1, Y_2\}$ مجموعة اساسية لحلول النظام المتجانس. نبحث على الحلول للنظام الخطي بطريقة تغيير الثوابت. $X = UY_1 + VY_2$.

مثال

ليكن النظام الخطي للمعادلات الخطية $X' = AX + \begin{pmatrix} e^t \\ \cos t \end{pmatrix}$ حيث $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\{Y_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Y_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

إذا كان $X = UY_1 + VY_2$، فإن

$$\begin{cases} U'e^t + V'e^{3t} & = & e^t \\ U'e^t - V'e^{3t} & = & \cos t \end{cases}$$

إذًا

$U = a + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}e^{-t}(\sin t - \cos t)$,

$V = b - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{20}e^{-3t}(3\cos t - \sin t)$.

$$X = \begin{pmatrix} ae^t + be^{3t} + \frac{2t-1}{4}e^t - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{5}\sin t \\ ae^t - be^{3t} + \frac{2t+1}{4}e^t - \frac{2}{5}\cos t + \frac{3}{10}\sin t \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}$$

إذا كان $X_0 = X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$، فإن $a = \frac{1}{4}$, $b = \dfrac{11}{10}$ و

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^t + \frac{11}{10}e^{3t} + \frac{2t-1}{4}e^t - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{5}\sin t \\ \frac{1}{4}e^t - \frac{11}{10}e^{3t} + \frac{2t+1}{4}e^t - \frac{2}{5}\cos t + \frac{3}{10}\sin t \end{pmatrix}.$$

مثال

ليكن النظام الخطي للمعادلات الخطية $X' = AX + \begin{pmatrix} e^t \\ \cos t \end{pmatrix}$ حيث $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

ليكن $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$، $X_1 = (A - I)X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$X = (Ut + V)e^t X_1 + Ue^t X_2 = e^t \begin{pmatrix} 2Ut + 2V + U \\ 2Ut + 2V \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2U't + 2V' + 2U' & = & 1 \\ 2U't + 2V' & = & e^{-t} \cos t \end{cases}$$

$$U = a + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{-t}(\cos t - \sin t)$$

$$V = b - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}te^{-t}(\sin t - \cos t) + \frac{1}{4}e^{-t}(2\sin t - \cos t)$$

$$X = \begin{pmatrix} (2at + a + 2b + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t)e^t + \frac{1}{4}(3\sin t - \cos t) \\ \\ (2at + 2b + \frac{1}{2}t^2)e^t + \frac{1}{2}(2\sin t - \cos t) \end{pmatrix}$$

إذا كان $X_0 = X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$، فإن $a = \frac{7}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$ و

$$X = \begin{pmatrix} (4t + \frac{5}{4} + \frac{1}{2}t^2)e^t + \frac{1}{4}(3\sin t - \cos t) \\ \\ (\frac{7}{2}t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^2)e^t + \frac{1}{2}(3\sin t - \cos t) \end{pmatrix}$$

مثال

ليكن النظام الخطي للمعادلات الخطية $X' = AX + \begin{pmatrix} e^t \\ \cos t \end{pmatrix}$ حيث $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
$\lambda_1 = 2 + \mathrm{i}$, $\lambda_2 = 2 - \mathrm{i}$ هي القيم المميزة للمصفوفة.
ليكن $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$، فإن $AX_1 = \lambda_1 X_1$.
في هذه الحالة $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
ليكن

$$X = e^{2t} \begin{pmatrix} U \cos t + V \sin t \\ V \cos t - U \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} U' \cos t + V' \sin t &= e^{-t} \\ -U' \sin t + V' \cos t &= e^{-2t} \cos t \end{cases}$$

$$U = a + \frac{1}{2} e^{-t}(\sin t - \cos t) + \frac{1}{8} e^{-2t}(\cos(2t) + \sin(2t))$$

$$V = b + \frac{1}{2} e^{-t}(-\cos t + \sin t) - \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{1}{20} e^{-2t}(-2\cos(2t) + \sin(2t))$$

تحويل لابلاص و الأنظمة الخطية للمعادلات التفاضلية

ليكن النظام الخطي للمعادلات الخطية

$$\begin{cases} x' &= 2x - y + e^t \\ y' &= x + 2y + \cos t \end{cases}, \quad x(0) = 1, y(0) = -1.$$

لتكن $X = \mathcal{L}(x)$ و $Y = \mathcal{L}(y)$. بالتالي نحصل على:

$$\begin{cases} sX - 1 &= 2X - Y + \frac{1}{s-1} \\ sY + 1 &= X + 2Y + \frac{s}{s^2+1} \end{cases} \iff \begin{cases} (s-2)X + Y &= 1 + \frac{1}{s-1} \\ -X + (s-2)Y &= -1 + \frac{s}{s^2+1} \end{cases}$$

إذاً

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{(s-2)^2+1}\begin{vmatrix} \frac{s}{s-1} & 1 \\ \frac{s-s^2-1}{s^2+1} & s-2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{s(s-2)}{(s-1)((s-2)^2+1)} + \frac{s^2-s+1}{(s^2+1)((s-2)^2+1)} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{8}\frac{13(s-2)+9}{(s-2)^2+1} + \frac{1}{8}\frac{-s+1}{s^2+1} \end{aligned}$$

$$x = -\frac{1}{2}e^t + \frac{13}{8}e^{2t}\cos t + \frac{9}{8}e^{2t}\sin t - \frac{1}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t$$

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{1}{(s-2)^2+1}\begin{vmatrix} s-2 & \frac{s}{s-1} \\ -1 & \frac{s-s^2-1}{s^2+1} \end{vmatrix} \\
&= \frac{(s-2)(s-s^2-1)}{(s^2+1)((s-2)^2+1)} + \frac{s}{(s-1)((s-2)^2+1)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{8}\frac{9(s-2)-13}{(s-2)^2+1} - \frac{1}{8}\frac{3s-1}{s^2+1}
\end{aligned}
$$

$$
y = \frac{1}{2}e^t - \frac{9}{8}e^{2t}\cos t + \frac{13}{8}e^{2t}\sin t - \frac{3}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t
$$

مثال

ليكن النظام الخطي للمعادلات الخطية

$$\begin{cases} x' &= \quad 2x - y + e^t \\ y' &= -x + 2y + \cos t \end{cases}, \quad x(0) = 1, y(0) = -1.$$

لتكن $X = \mathcal{L}(x)$ و $Y = \mathcal{L}(y)$. بالتالي نحصل على:

$$\begin{cases} sX - 1 &= \quad 2X - Y + \frac{1}{s-1} \\ sY + 1 &= -X + 2Y + \frac{s}{s^2+1} \end{cases} \iff \begin{cases} (s-2)X + Y &= \quad 1 + \frac{1}{s-1} \\ X + (s-2)Y &= -1 + \frac{s}{s^2+1} \end{cases}$$

إذًا

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{(s-1)(s-3)} \begin{vmatrix} \frac{s}{s-1} & 1 \\ \frac{s-s^2-1}{s^2+1} & s-2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{s(s-2)}{(s-1)^2(s-3)} + \frac{1}{(s-1)(s-3)} - \frac{s}{(s^2+1)((s-1)(s-3))} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{11}{10}\frac{1}{s-3} - \frac{1}{10}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{2}te^t + \frac{11}{10}e^{3t} - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{5}\sin t$$

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{1}{(s-1)(s-3)}\begin{vmatrix} s-2 & \frac{s}{s-1} \\ 1 & \frac{s-s^2-1}{s^2+1} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{11}{10}\frac{1}{x-3} - \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{10}\frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}
$$

$$
y = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}te^t - \frac{11}{10}e^{3t} - \frac{2}{5}\cos t + \frac{3}{10}\sin t
$$

$$\begin{cases} x' &= & 2x+y+e^t \\ y' &= & -x+2y+\cos t \end{cases}, x(0)=1,\ y(0)=-1 \iff \begin{cases} (s-2)X- Y &= \\ X+(s-2)\,Y &= \end{cases}$$

و بالتالي

$$\begin{aligned} X &= \frac{s(s-2)}{(s-1)((s-2)^2+1))} - \frac{1}{(s-2)^2+1} \\ &\quad + \frac{s}{(s^2+1)((s-2)^2+1))} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{5}{4}\frac{(s-2)}{(s-2)^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s-2)^2+1} \\ &\quad + \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

$$x = -\frac{1}{2}e^t + \frac{5}{4}e^{2t}\cos t - \frac{1}{2}e^{2t}\sin t + \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{4}\sin t$$

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{-(s-2)}{(s-2)^2+1)} - \frac{s(s-2)}{(s^2+1)((s-2)^2+1)} \\
&\quad - \frac{s}{(s-1)((s-2)^2+1))} \\
&= \frac{-(s-2)}{(s-2)^2+1)} - \frac{3}{8}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{8}\frac{1}{s^2+1} \\
&\quad + \frac{3}{8}\frac{(s-2)}{(s-2)^2+1} + \frac{1}{8}\frac{1}{(s-2)^2+1} \\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{(s-2)}{(s-2)^2+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{(s-2)^2+1}
\end{aligned}
$$

$$
y = -\frac{1}{8}e^{2t}\cos t - \frac{3}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t - \frac{1}{2}e^{t} - \frac{13}{8}e^{2t}\sin t
$$

مثال

ليكن النظام الخطي للمعادلات الخطية $X' = AX + \begin{pmatrix} e^t \\ \cos t \end{pmatrix}$ حيث $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
و $x(0) = 1,\ y(0) = -1$.

$$X' = AX + \begin{pmatrix} e^t \\ \cos t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (s-3)X + 2Y & = \frac{s}{s-1} \\ -2X + (s+1)Y & = -1\frac{s}{s^2+1} \end{cases}$$

$$X = \frac{1}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2} + \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{1}{s^2+1}$$

$$x = (t+2)^2 e^t + \sin t$$

$$Y = -\frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{2}{(s-1)^3} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s^2+1}$$

$$y = (t^2 + 3t - \frac{1}{2})e^t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}\sin t$$