بسم الله الرحمن الرحيم

١- أ) احسب التكاملات الآتية:

$$\int_C (\bar{z})^2\, dz \quad : \quad z(t) = t + (1-2t)i \quad C \text{ حيث}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(3x)}{x^4+4}\, dx \quad , \quad \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}\, d\theta$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx .$$

ب) أثبت أن الدالة التحليلية ϕ الموجبة على ϕ يجب أن تكون ثابتة.

٢- أثبت صحة

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+a^2} = \frac{\pi}{a \sinh a\pi}$$

ثم استنتج أن

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{-\pi^2}{12}$$

٣- إذا كانت أصفار f هي $z_1, \dots, z_n$ داخل منحنى مغلق C فأثبت أن

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z f'(z)}{f(z)}\, dz = z_1 + \dots + z_n$$

كيف تكون النتيجة إذا كانت للدالة f أقطاب $w_1, w_2, \dots, w_n$ داخل C مع التعليل.

٤- أ) لنفرض أن f تحليلية في $|z|<4$ وأن $|f(z)| \le 5$ على الدائرة $|z-1|=2$ أوجد حداً أعلى للمقدار $|f''(1)|$.

ب) أوجد تحويل موبيوس الذي يأخذ المحور الحقيقي إلى دائرة الوحدة $|w|=1$ وليتحقق $f(i)$ ثم $f(-i) = -\frac{1}{2}$ مع التعليل.

٥- اثبت نظرية روشيه ومنها أستنتج النظرية الأساسية في الجبر.

٦- أ) لتكن $f(z)=\begin{cases}\frac{\bar{z}^3}{|z|^2} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ اثبت ان f تحقق معادلتي كوشي ريمان عند $z=0$ ولكن ليست قابلة للاشتقاق عند $z=0$

ب) اوجد حلول المعادلة

$$\sin z = i$$

٧- أ) اذا كانت كل من $f(z)$ و $\overline{f(z)}$ دوال تحليلية فاثبت ان $f(z)$ لابد وان تكون ثابتة.

ب) كم صفراً للدالة $p(z)=z^8-5z^3+z-2$ تقع داخل

$$1<|z|<2$$

٨- أ) اثبت انه:

$$|\cosh z|^2=\sinh^2 x+\cos^2 y$$

ب) من اجل $|a|<1$ اثبت ان

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|\leq 1$$ لجميع $|z|\leq 1$

٩- أ) اوجد تحويل موبيس T الذي يأخذ دائرة الوحدة الى دائرة الوحدة ويأخذ $\frac{1}{2}$ الى الصفر و 1 الى i.

ب) لتكن T تحويل موبيس بحيث $T(1)=\infty$ ويأخذ المحور التخيلي الى دائرة الوحدة $|w|=1$ فما هي قيمة $T(-1)$