تمارين لباب (التكامل المركب)

لا يكتب هذا الهامش

المجموعة الأولى:

(1) احسب $\int_{\gamma} z\,dz$ حيث γ القوس في الربع الأول على طول $|z|=1$ بين 1 و i.

(2) احسب $\int \log z\,dz$ على طول كل من المنحنيات: $\gamma_1: z(t)=e^{it}$ حيث $0\le t\le \frac{\pi}{2}$ و على طول المنحنى $\gamma_2: z(t)=e^{-it}$ حيث $0\le t\le \pi$

المجموعة الثانية:

(1) أثبت أن $\int_{|z|=1} \frac{\log z}{z}\,dz = 0$ رغم أن $\frac{\log z}{z}$ ليست تحليلية على $|z|\le 1$.
ما هي النتيجة التي يمكن الحصول عليها إذا كاملنا:
$\int_{\gamma} \frac{\operatorname{Log} z}{z}\,dz$ حيث $\gamma: z(t)=e^{it}$ و $0\le t\le 2\pi$ وضح.

المجموعة الثالثة:

لنفرض أن: $\gamma: z(t)=2e^{it}+1$ و $0\le t\le 2\pi$
أحسب التكامل في الأسئلة التالية:

(5) $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z-1}\,dz$

(7) $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2-z}\,dz$

لنفترض أن: $\gamma: z(t)=2e^{it}+1$, $0\le t\le 2\pi$
أحسب التكامل في الأسئلة التالية:

(9) $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{(z-1)^2}\,dz$

(11) $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z-1)^3}\,dz$

لا يكتب هذا الهامش

(١٥) يمكن حساب التكامل أثبت أن:

$$\left| \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{4\pi}{3}$$

(١٧) أحسب $\int_{|z|=1} |z+1|\,|dz|$

(١٩) إذا كانت $f(z)$ تحليلية في $|z|<1$ و $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$

برهن على أن $|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

(٢٠) أحسب $\int_{|z|=1} \frac{e^{kz^n}}{z}\,dz$ حيث n عدد صحيح موجب.

أثبت أن $\int_0^{2\pi} e^{k\cos n\theta} \cos(k \sin n\theta)\,d\theta = 2\pi$

المجموعة الرابعة:

(٥) أعط مثالاً لبيان كون الشرط غير الضروري لصحة مبدأ القيمة الصغرى

(٧) أثبت أنه إذا كانت $f(z)$ تحليلية وغير ثابتة في منطقة محدودة ζ ومتصلة على ζ ولها قيمة مطلقة ثابتة على حدود ζ فإنها على الأقل صفراً واحداً في ζ

(~~المجموعة الثالثة~~)