

# Indeterminate Forms

صيغ عدم التعيين

Math 111

Lecture 21

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University  
Department of Mathematics

2016

## صيغ عدم التعيين

Indeterminate Forms:

في هذا القسم سوف نقوم بدراسة حالات عدم التعيين على الصورة

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0},$$

$$\infty - \infty, \infty \cdot 0, 1^\infty, 0^0, \infty^0.$$

هذا حالات عدم التعيين والتي نحصل عليها من حساب النهاية والتي سوف نحسبها بالطرق التالية

الحالة الاولى:

صيغ عدم التعيين من النوع  $\frac{0}{0}$  :  
اذا كان ناتج النهاية

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

حصلنا على حالة عدم تعيين وذلك من حساب نهاية البسط على نهاية المقام وهنا نحتاج إلى اتباع طريقة اخرى لإيجاد النهاية.

قاعدة لوبيتال:  
قبل الشروع في قاعدة لوبيتال نقدم لكم مبرهنة القيمة المتوسطة  
لكوشي.  
مبرهنة القيمة المتوسطة لكوشي:

لتكن كل من الدالتين  $f(x)$  و  $g(x)$  متصلتين على الفترة  $[a, b]$  وقابلة للاشتقاق  
على  $(a, b)$ . إذا كانت  $g'(x) \neq 0$  لكل  $x \in (a, b)$ ، فإن هناك نقطة  $c \in (a, b)$   
تحقق

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

## قاعدة لوبيتال:

افرض أن الدالتين  $f(x)$  و  $g(x)$  قابلتان للاشتقاق على فترة  $I$  تحوي  $c$  (باستثناء ربما عند  $c$ ) وأن  $g'(x) \neq 0$  لكل  $x \in I \setminus \{c\}$ . إذا كان للكسر  $f(x)/g(x)$  الصيغة غير المعينة  $0/0$  وكانت  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  موجودة أو تساوي  $\infty$  أو  $-\infty$ ، فإن

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قاعدة لوبيتال تساعدنا في التعامل مع مثل هذا النهايات.

مثال : أوجد النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x.$$

الحالة الثانية :

صيغ عدم التعيين من النوع  $\frac{\infty}{\infty}$  :  
إذا كان ناتج النهاية

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

فاننا نستخدم المبرهنة التالية:

إذا كانت للنهاية  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  الصيغة  $\frac{\infty}{\infty}$  واستوفت  $f$  و  $g$  باقي شروط قاعدة  
لوبيتال، فإن:  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

مثال : أوجد النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}}{x^2}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}.$$



الحالة الثالثة:

صيغ عدم التعيين من النوع  $\infty \cdot 0$  :

نحصل على هذا الحالة من خلال حساب النهاية من الصورة التالية

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0 \cdot \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \text{ and } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty.$$

والعكس صحيح.

وهنا نقوم بتحويل النهاية إلى إحدى الصيغتين  $\frac{0}{0}$  OR  $\frac{\infty}{\infty}$  وذلك لتطبيق قاعدة لوبيتال بالطرق التالية

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ OR } f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

مثال : أوجد النهاية التالية :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x).$$

الحالة الرابعة:

صيغ عدم التعيين من النوع  $\infty - \infty$  :  
 $\infty / \infty$  /  $\infty / \infty$  /  $\infty / \infty$  وهنا نقوم بتحويل النهاية إلى إحدى الصيغتين  
 $\frac{0}{0}$  OR  $\frac{\infty}{\infty}$  وذلك لتطبيق قاعدة لوبيتال.

مثال : أوجد النهاية التالية :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right).$$

الحالة الخامسة:  
صيغ عدم التعيين من النوع

$$1^\infty, 0^0, \infty^0.$$

## Exercises

مثال : أوجد النهاية التالية :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5x}{2x} \right).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln(x)}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{9x - 1}}{\sqrt{x + 1}} \right).$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x) / \ln(x)).$$

*Thanks for listening.*