المحتويات

تعريف تكامل ريمان

تعريف

نقول لمجموعة محدودة و مرتبة $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ أنها تمثل تجزيئا للفترة $[a, b]$ إذا كان $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. الفترات $[x_j, x_{j+1}]$ تسمى الفترة الجزئية للتجزيئ σ.
إذا كان $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ تجزيئا للفترة $[a, b]$ نعرف مقياس التجزيئ σ، العدد

$$\|\sigma\| = \sup_{1 \leq j \leq n-1} |x_{j+1} - x_j|.$$

نرمز لمجموع التجزيئات للفترة $[a, b]$ بالرمز: $\mathbb{P}[a, b]$

تعريف

لتكن $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة و $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ تجزيء للفترة $[a, b]$.
نعرف الأعداد التالية:

$$M_j = \sup_{x\in[x_j, x_{j+1}]} f(x), \qquad m_j = \inf_{x\in[x_j, x_{j+1}]} f(x),$$

$$U(f, \sigma) = \sum_{j=0}^{n-1} M_j(x_{j+1} - x_j), \quad L(f, \sigma) = \sum_{j=0}^{n-1} m_j(x_{j+1} - x_j).$$

العددين $U(f, \sigma)$ و $L(f, \sigma)$ يسميان على التوالي مجموع ريمان الأكبر و مجموع ريمان الأصغر للدالة f على التجزيئ σ.

تعريف

1. نقول إن تجزيئا $\sigma_1 = \{x_0, \dots, x_n\}$ أدقّ أو أنعم من تجزيئ $\sigma_2 = \{y_0, \dots, y_m\}$ إذا كان $\{y_0, \dots, y_m\} \subset \{x_0, \dots, x_n\}$ و نكتب $\sigma_2 < \sigma_1$.
2. إذا كان $\sigma_1 = \{x_0, \dots, x_n\}$ و $\sigma_2 = \{y_0, \dots, y_m\}$ تجزيئين للفترة $[a, b]$، نعرف التجزيئ $\sigma_1 \cup \sigma_2$ التجزيئ المعرف بترتيب النقاط $\{y_0, \dots, y_m, x_0, \dots, x_n\}$.

مبرهنة

لتكن $\mathbb{R} \longrightarrow [a, b] :f$ دالة محدودة و σ_1 تجزيئا للفترة $[a, b]$. إذا كان $y \in [a, b]$ و $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ التجزيئ للفترة $[a, b]$ حيث $\sigma_2 = \{a, y, b\}$، فإن

$$L(f, \sigma) \leq L(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma).$$

نتيجة

إذا كان σ_1 تجزيئا أدق من تجزيئ σ_2 و إذا كانت $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة، فإن

$$L(f, \sigma_2) \leq L(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma_2)$$

و

$$U(f, \sigma_1) - L(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma_2) - L(f, \sigma_2).$$

نتيجة

إذا كان σ_1 و σ_2 تجزيئين للفترة $[a, b]$ و إذا كانت $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة، فإن

$$L(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma_2).$$

نتيجة

ليكن $\mathcal{I} = \{L(f,\sigma);\ \sigma \in \mathbb{P}[a,b]\}$ و $\mathcal{J} = \{U(f,\sigma),\ \sigma \in \mathbb{P}[a,b]\}$.
المجموعة $\mathcal{I}$ لها حد علوي أصغر و نرمز له بالرمز $L(f)$ و المجموعة $\mathcal{J}$ لها حد سفلي أكبر و نرمز له بالرمز $U(f)$.

نتيجة

لتكن $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة. إذا وجد تجزيئ σ للفترة $[a,b]$ بحيث $L(f,\sigma) = U(f,\sigma)$، فإن الدالة f قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a,b]$.

تعريف

نقول إنّ دالة محدودة $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$ إذا كان $L(f) = U(f)$ و نرمز لهذا العدد بالرمز:

$$L(f) = U(f) = \int_a^b f(x)\ dx$$

و يسمى تكامل الدالة f على الفترة $[a, b]$.
نرمز لمجموعة الدوال القابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$ بالرمز $\mathcal{R}([a, b])$.

مبرهنة

تكون دالة محدودة $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة لتكامل ريمان إذا و فقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$، يوجد تجزيئ $\sigma = (a = x_0, \ldots, x_n = b)$ بحيث $U(f, \sigma) - L(f, \sigma) \leq \varepsilon$.

مبرهنة

كل دالة مطردة على فترة $[a, b]$ قابلة لتكامل ريمان.

مبرهنة

كل دالة متصلة على فترة $[a, b]$ قابلة لتكامل ريمان.

تعريف

لتكن $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة و لتكن A مجموعة جزئية من $[a,b]$.
العدد $O(f,A) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) - \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ يسمي تذبذب الدالة f على المجموعة A.

مبرهنة

[مبرهنة داربو]
لتكن $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة. تكون الدالة f قابلة لتكامل ريمان على فترة $[a,b]$ إذا و فقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $\alpha > 0$ بحيث $U(f,\sigma) - L(f,\sigma) \leq \varepsilon$ لكل تجزيئ σ، حيث $\|\sigma\| < \alpha$.

نتيجة

لتكن $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة لتكامل ريمان و لتكن I قيمة تكاملها. إذاً لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\alpha > 0$ بحيث $|U(f, \sigma) - I| \leq \varepsilon$ و $|L(f, \sigma) - I| \leq \varepsilon$ لكل تجزيئ σ يحقق $\|\sigma\| < \alpha$.

ملاحظات

1. ليكن $\sigma_n = (x_0, \ldots, x_n)$ تجزيئا للفترة $[a, b]$ و $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ حيث $\lambda_j \in [x_{j-1}, x_j]$، $\forall\ j = 1, \ldots, n$ و نقول أن λ هو علامة على التجزيئ σ.
المجموع $R(f, \sigma, \lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) f(\lambda_j)$، يسمى مجموع ريمان على التجزيئ σ حسب العلامة λ. و بما أن $m_j \leq f(\lambda_j) \leq M_j$ لكل $1 \leq j \leq n$، فإن $L(f, \sigma) \leq R(f, \sigma) \leq U(f, \sigma)$.
إذا كانت الدالة f قابلة لتكامل ريمان و إذا كانت I قيمة تكاملها، فإنّ لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\alpha > 0$ بحيث $|R(f, \sigma) - I| \leq \varepsilon$، لكل تجزيئ σ، $|\sigma| < \alpha$.
2. نحصل على نفس النتيجة إذا عوضنا $f(\lambda_j)$ بأي عدد $c_j \in [m_j, M_j]$.

نتيجة

تكون دالة $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة لتكامل ريمان إذا و إذا فقط إذا لكل $\varepsilon > 0$، توجد دالتين درجيتين على الفترة $[a,b]$، f_ε و g_ε بحيث $f_\varepsilon \leq g_\varepsilon$ و $\int_a^b (g_\varepsilon - f_\varepsilon)\, dx \leq \varepsilon$.

مبرهنة

تكون دالة قابلة لتكامل ريمان على فترة $[a, b]$ إذا و فقط إذا كانت قابلة لتكامل ريمان على الفترات $[a, c]$ و $[c, b]$ و

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

لكل $c \in [a, b]$.

مبرهنة

فضاء الدوال القابلة لتكامل ريمان $[a, b]$ هو فضاء متجهات على $\mathbb{R}$.

مبرهنة

إذا كانت $f\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$ دالة قابلة لتكامل ريمان على فترة $[a,b]$ و إذا كانت $g\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، فإنّ الدالة $g\circ f$ قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a,b]$.

مبرهنة

[متباينة كوشي شوارتز]

لتكن f و g دالتين قابلتين لتكامل ريمان على فترة $[a, b]$. إذاً

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\ dx \int_a^b g^2(x)\ dx. \qquad (1)$$

مبرهنة

[الصيغة الأولى للقيمة المتوسطة للتكامل]
لتكن f و g دالتين قابلتين لتكامل ريمان على فترة $[a, b]$. نفترض أنّ الدالة f متصلة و الدالة g لها إشارة ثابتة على الفترة $[a, b]$. إذاً يوجد $c \in [a, b]$ بحيث

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\;dx. \tag{2}$$

نتيجة

[متباينة منكوفزكي]
إذا كانت f و g دالتين قابلتين لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$، فإنّ
$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

مبرهنة

[الصيغة الثانية للقيمة المتوسطة للتكامل]
لتكن $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و موجبة و تناقصية و لتكن g دالة قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$. إذاً يوجد $c \in [a, b]$ بحيث

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(a)\int_a^c g(x)\ dx.$$

نتيجة

لتكن $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و مطردة على الفترة $[a, b]$ و لتكن g دالة قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$، فإنه يوجد $c \in [a, b]$ بحيث

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(a)\int_a^c g(x)\ dx + f(b)\int_c^b g(x)\ dx.$$

مبرهنة

[المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل و التكامل]
إذا كانت $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، فإن الدالة $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ هي دالة أصلية للدالة f، لكل $a \in I$.

مبرهنة

لتكن $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و لتكن $u\colon I \longrightarrow [a,b]$ دالة قابلة للإشتقاق. إذاً الدالة $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\ dt$ قابلة للإشتقاق على الفترة I و $F'(x) = u'(x)f(u(x))$، لكل $x \in I$.

مبرهنة

لتكن f و g دالتين من الدرجة C^n على فترة I، فإن

$$\int f(x)g^{(n)}(x)\,dx = \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p f^{(p)}(x)\,g^{(n-1-p)}(x) + (-1)^n \int g(x)f^{(n)}(x)\,dx.$$

مبرهنة

[مفكوك تايلور مع باقي تكامل]
لتكن $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة C^n. إذا كان a و x في I، فإن

$$f(x) = f(a) + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt.$$

تعريف

1 نقول إنّ دالة $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة لتكامل ريمان محليا على الفترة I إذا كان إقتصار الدالة على كل فترة $[a, b] \subset I$ قابلة لتكامل ريمان.
(كل دالة متصلة أو مطردة على فترة، فهي قابلة لتكامل ريمان محليا.)

2 لتكن f دالة قابلة لتكامل ريمان محليا على فترة $[a, b[$ حيث $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
نقول إنّ تكامل الدالة f على الفترة $[a, b[$ متقارب إذا كانت النهاية $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\ dt$ موجودة في $\mathbb{R}$. هذه النهاية تسمى تكامل الدالة f على الفترة $[a, b[$ و نرمز له بالرمز $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$.

3 لتكن f دالة قابلة لتكامل ريمان محليا على فترة $]a, b]$، حيث $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
نقول إنّ تكامل الدالة f على الفترة $]a, b]$ متقارب إذا كانت النهاية

تعريف

نقول إن تكامل دالة f على فترة I متقارب مطلقا إذا كان تكامل الدالة $|f|$ على فترة I متقاربا.

اختبار تقارب التكامل المعتل

مبرهنة

(اختبار كوشي)

لتكن $f\colon [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة لتكامل ريمان محليا (يمكن أن نعوض هذه الفرضية بأن تكون الدالة متصلة قطعة قطعة على كامل الفقرة)، حيث $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

يكون التكامل $\int_a^b f(t)\, dt$ متقاربا إذا و فقط إذا:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ c < b : \left|\int_x^y f(t)\, dt\right| \leq \varepsilon, \quad \forall x, y \in]c, b[.$$

هذا الإختبار هو اختبار كوشي لنهاية الدوال.

نتيجة

لتكن f دالة قابلة لتكامل ريمان محليا على فترة I. إذا كان التكامل $\int_I f(x)\,dx$ متقاربا مطلقا، فهو متقارب.

مبرهنة

لتكن $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ دالة موجبة قابلة لتكامل ريمان محليا. يكون التكامل $\int_I f(x)\,dx$ متقاربا إذا و فقط إذا وجد $M \geq 0$ بحيث $\int_a^b f(x)\,dx \leq M$ ، حيث $a < b$ في I.

نتيجة

إذا كانت f و g دالتين موجبتين و قابلتين لتكامل ريمان محليا على فترة I بحيث $f \leq g$.
إذا كان التكامل $\int_I g(x)\,dx$ متقاربا، فإن التكامل $\int_I f(x)\,dx$ متقارب.
إذا كان التكامل $\int_I f(x)\,dx$ غير متقارب، فإن التكامل $\int_I g(x)\,dx$ غير متقارب.

ملاحظة

لتكن f و g دالتين موجبتين و قابلتين لتكامل ريمان محليا على فترة I. نفترض أن $|f| \leq g$ على الفترة I. إذًا، إذا كان التكامل $\int_I g(x)\,dx$ متقاربا، فإن التكامل $\int_I |f(x)|\,dx$ متقارب أيضا.

أمثلة

1. التكامل $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ متقارب و ذلك لأن الدالة $\frac{\sin x}{x}$ يمكن تمديدها كدالة متصلة على الفترة $[0,1]$.
2. التكامل $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx$ متقارب و ذلك لأن $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$. هذا التكامل متقارب لأن $\left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \le \frac{1}{t^2}$ و $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = 1$.
3. التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ متقارب لكل $\alpha > 0$.

إذا كان $b > a > 1$، باستعمال مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل (20)، يوجد

مبرهنة

لتكن $f\colon [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ دالة موجبة و قابلة لتكامل ريمان محليا.

1. إذا وجد $\alpha > 1$ بحيث $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = c \in \mathbb{R}$ ، فإن تكامل الدالة f على الفترة $[1,+\infty)$ متقارب.
2. إذا وجد $\alpha < 1$ بحيث $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = c \in]0,+\infty]$ ، فإن تكامل الدالة f على الفترة $[1,+\infty)$ غير متقارب.

نتيجة

لتكن $a, b \in \mathbb{R}$ و $f\colon]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ دالة موجبة قابلة لتكامل ريمان محليا.

1. إذا وجد $\alpha < 1$ بحيث $\lim\limits_{x \to a^+} (x-a)^\alpha f(x) = 0$ ، فإن تكامل الدالة f على الفترة $]a, b]$ متقارب.
2. إذا وجد $\alpha > 1$ بحيث $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-a)^\alpha f(x) = +\infty$ ، فإن تكامل الدالة f على الفترة $]a, b]$ غير متقارب.

أمثلة

لتكن α و β في $\mathbb{R}$. نعرف الدالة $f_{\alpha,\beta}(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$، على الفترة $x \in [2, +\infty[$.

- إذا كان $\alpha > 1$، فإن لكل $1 < \gamma < \alpha$، $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\gamma} f_{\alpha,\beta}(x) = 0$ و بالتالي فإن تكامل الدالة $f_{\alpha,\beta}$ على الفترة $[2, +\infty[$ متقارب.
- إذا كان $\alpha < 1$، فإن لكل $1 > \gamma > \alpha$، $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\gamma} f_{\alpha,\beta}(x) = +\infty$ و بالتالي فإن تكامل الدالة $f_{\alpha,\beta}$ على الفترة $[2, +\infty[$ غير متقارب.
- إذا كان $\alpha = 1$، فإن $\displaystyle\int_{2}^{x} \frac{dt}{t(\ln t)^{\beta}} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dt}{t^{\beta}}$ و يكون تكامل الدالة $f_{1,\beta}$ على الفترة $[2, +\infty[$ متقاربا إذا و فقط إذا $\beta > 1$.

اختبار آبل للتقارب

مبرهنة

[مبرهنة آبل]
لتكن $f\colon [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة لتكامل ريمان محليا و $g\colon [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و تناقصية، حيث $a\in\mathbb{R}$، $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. نفترض أن:

1. يوجد $M\geq 0$ بحيث $\left|\int_x^y f(t)\,dt\right|\leq M$ لكل x و y في $[a,b[$،
2. $\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=0$

إذًا التكامل $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ متقارب.

البرهان

ليكن $a \leq x < y < b$. باستعمال المبرهنة (18)،

$$\begin{aligned} \left|\int_x^y f(t)g(t)\,dt\right| &= \left|g(x)\int_x^c f(t)\,dt + g(y)\int_c^y f(t)\,dt\right| \\ &\leq M(|g(x)| + |g(y)|). \end{aligned}$$

بما أن $\lim_{x\to b^-} g(x) = 0$ ، فإن $\lim_{x\to b^-} \int_x^y f(t)g(t)\,dt = 0$.

مثال

التكامل $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\, dx$ متقارب لكل $\alpha > 0$.

المحتويات

تعريف

1 لتكن $(u_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية. نعرف المتتالية $(S_n)_n$ بما يلي:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

نقول إنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة، إذا كانت المتتالية $(S_n)_n$ متقاربة.

2 إذا كانت المتتالية $(S_n)_n$ متقاربة، نرمز بنهايتها بالرمز $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

3 نقول إنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متباعدة إذا كانت المتتالية $(S_n)_n$ متباعدة.

ملاحظة

1. إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة، فإنّ $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$ و ذلك لأن $u_n = S_n - S_{n-1}$
2. إذا كانت $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$ فإن المتسلسلة ليست بالضرورة متقاربة. المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ متباعدة لأنّ $S_n = \sqrt{n+1} - 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و لكن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

مبرهنة

[إختبار كوشي]

لتكن $(u_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية. المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة إذا و فقط إذا

$$\forall \ \ \varepsilon > 0 \ \ \exists \ N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \ \forall \ q \geq p \geq N_\varepsilon ; \ |\sum_{n=p}^{q} u_n| \leq \varepsilon .$$

هذا معيار كوشي بالنسبة للمتتالية $(S_n)_n$.

تعريف

نقول إن المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ متقاربة مطلقا إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ متقاربة.

ملاحظة

كل متسلسلة متقاربة مطلقا فهي متقاربة و العكس غير صحيح.

لتكن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. إذا كانت $S_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p+1}}{p}$، فإن

$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}-S_{2n}=0$ ، $S_{2n+2}-S_{2n}=-\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}\leq 0$

و $S_{2n+1}-S_{2n-1}=\frac{1}{2n(2n+1)}\geq 0$. إذاً المتتاليتين $(S_{2n})_n$ و $(S_{2n+1})_n$ متجاورتين و هذا يثبت أنّ المتتالية $(S_n)_n$ متقاربة.

من ناحية أخرى $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geq\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$. إذاً المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ليست متقاربة مطلقا.

يوجد العديد من إختبارات التقارب للمتسلسلات ذات الحد الموجب و يعتمد أهمها على أنّ كل متتالية تزايدية متقاربة إلا إذا كانت محدودة علويا.

مبرهنة

[إختبار المقارنة]

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين من الأعداد الحقيقية الموجبة. نفترض أنه يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث، $v_n \leq u_n$ لكل $n \geq k$. إذاً إذا كانت المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ متقاربة، فإنّ المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ متقاربة أيضا.

نتيجة

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين من الأعداد الحقيقية الموجبة. إذا وجد $a > 0$ و $b > 0$ بحيث $au_n \leq v_n \leq bu_n$ لكل $n \geq k$، فإنّ المتسلسلتين $\sum_{n\geq 1} u_n$ و $\sum_{n\geq 1} v_n$ متقاربتين أو متباعدتين معا.

نتيجة

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتن من الأعداد الحقيقية الموجبة. نفترض أنّ

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell$$

1. إذا كان $\ell > 0$ فإن المتسلسلتين $\sum_{n\geq 1} u_n$ و $\sum_{n\geq 1} v_n$ متقاربتين أو متباعدتين معا
2. إذا كان $\ell = 0$ فإنه إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} v_n$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة.
3. إذا كان $\ell = +\infty$ فإنه إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} v_n$ متقاربة.

مبرهنة

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين من الأعداد الموجبة. إذا وجد $m \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq m$، $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$، فإنّه إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} v_n$ متقاربة فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة.

مبرهنة

[إختبار التكامل]

لتكن f دالة متصلة و تناقصية على الفترة $]1 \; +\infty[$ و $u_n = f(n)$، لكل $n \in \mathbb{N}$. إذاً التكامل $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ متقارب إذا و فقط إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة.

نتيجة

[متسلسلة ريمان]

المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ متقاربة إذا و فقط إذا كان $\alpha > 1$.

مبرهنة

[المقارنة بمتسلسلات ريمان]

لتكن $(u_n)_n$ متتالية من الأعداد الموجبة. لنفترض أنه يوجد $0 < a < b$ بحيث بعد حد $0 < a \leq n^\alpha u_n \leq b < +\infty$. إذاً المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة إذا و فقط إذا كان $\alpha > 1$.

هذه نتيجة المبرهة (1)

تمرين

أثبت أنّ متسلسلة $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$ متقاربة إذا و فقط إذا كانت $\alpha > 1$ أو $\alpha = 1$ و $\beta > 1$.

(هذه المتسلسلة تسمى متسلسلة بارتران (Bertrand))

إختبار دالمبار

مبرهنة

لتكن $(u_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية بحيث $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=\ell$.

1. إذا كان $1 > \ell$ فإن المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ متقاربة مطلقا.
2. إذا كان $1 < \ell$ فإن الحد العام للمتسلسلة غير محدود و المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ متباعدة.
3. إذا كانت $\ell = 1$ فلا يمكن تحديد طبيعة المتسلسلة (متقاربة أم لا).

مبرهنة

[إختبار كوشي]

لتكن $(u_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية و $\ell = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$.

1. إذا كان $\ell < 1$، فإنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة مطلقا.
2. إذا كان $\ell > 1$ فإن الحد العام للمتسلسلة غير محدود و بالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متباعدة.
3. إذا كان $\ell = 1$ فلا يمكن أن نحدد طبيعة المتسلسلة (متقاربة أم لا).

ملاحظة

إذا كانت $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=\ell$ ، فإن $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\ell$.

مثال

1. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ متقاربة مطلقا لكل $x \in \mathbb{R}$ و ذلك لأنّ $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|x^n|}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$. و مجموع هذه المتسلسلة هي الدالة الأسية للأعداد الحقيقية $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
2. كذلك لكل $|x| < 1$، المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ متقاربة مطلقا.

مبرهنة

[إختبار آبل]

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين من الأعداد الحقيقية بحيث

1. المتتالية $(v_n)_n$ تناقصية و نهايتها 0.
2. المتتالية $\left(S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k\right)_n$ محدودة.

إذاً المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n v_n$ متقاربة.

النتيجة تبقى صحيحة إذا كانت المتتالية $(S_n)_n$ محدودة و المتتالية $(v_n)_n$ نهايتها 0 و المتسلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty}(v_n - v_{n+1})$ متقاربة.

مثال

1. لتكن $v_n = \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$، لكل $n \geq 1$ و $u_n = e^{in\theta}$، $0 < \theta < 2\pi$.

$\frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})} \geq |\sum_{n=p}^{q} u_n|$ و يمكن إثبات أنّ

$\sum_{n\geq 2} \frac{2}{(n-1)^2} \geq \sum_{n\geq 2} |v_n - v_{n-1}|$.

و بالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]} e^{in\theta}}{n}$ متقاربة.

2. نريد أن نثبت أن المتتالية $(s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n)_n$ متقاربة.

نعرف المتتالية $(u_n)_n$ كما يلي: $u_1 = S_1 = 1$ و لكل $n \geq 2$،

$$u_n = S_n - S_{n-1} \quad = \quad \frac{1}{n} + \ln \frac{n-1}{n}$$

تعريف

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين من الأعداد الحقيقية. لكل $n \in \mathbb{N}$، نعرف

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k}. \tag{1}$$

المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} c_n$ تسمى متسلسلة الضرب للمتسلسلتين $\sum_{n\geq 1} u_n$ و $\sum_{n\geq 1} v_n$.

سنبحث عن العلاقة بين تقارب متسلسلة الضرب و تقارب المتسلسلتين.
إذا كانت المتسلسلتين $\sum_{n\geq 1} u_n$ و $\sum_{n\geq 1} v_n$ متقاربتين هذا لا يضمن تقارب متسلسلة الضرب.

مثال

المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ متقاربة ولكن متسلسلة الضرب لهذه المتسالة مع نفسها ليست متقاربة.

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}.$$

وبالتالي $|c_n| \geq 1$.

المبرهنة التالية تؤكد تقارب متسلسلة الضرب تحت شروط على المتسلسلتين.

مبرهنة

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين من الأعداد الحقيقية.

1 إذا كانت المتسلسلتين $\sum_{n\geq1} u_n$ و $\sum_{n\geq1} v_n$ متقاربتين مطلقا، فإنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq1} c_n$ متقاربة مطلقا و $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n)(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n)$

2 إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq1} u_n$ متقاربة مطلقا و المتسلسلة $\sum_{n\geq1} v_n$ متقاربة، فإنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq1} c_n$ متقاربة و $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n)(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n)$

متتاليات ومتسلسلات الدوال

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

28 جانفي 2021

المحتويات

متتاليات الدوال

تعريف

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال المعرفة على مجموعة A في $\mathbb{R}$.

1. نقول إنّ المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب نقطيا (أو تتقارب تقاربا بسيطا) على المجموعة A إذا كانت المتتالية $(f_n(x))_n$ متقاربة لكل $x \in A$.
2. نقول إنّ المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام على المجموعة A و نهايتها دالة f إذا كان

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

ملاحظة

1. تكون المتتالية $(f_n)_n$ متتقاربة تقاربا بسيطا على المجموعة A و نهايتها الدالة f، إذا و فقط إذا كان لكل $x \in A$ و لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ لكل $n \geq N$.
2. تكون المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام على المجموعة A و نهايتها الدالة f إذا و فقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ لكل $n \geq N$ و لكل $x \in A$.

مثال

1. لتكن $f_n(x) = x^n$ لكل $x \in I = [0,1]$ و لكل $n \in \mathbb{N}$. المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة و نهايتها الدالة f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

بما أنّ $\sup\limits_{x \in [0,1[} x^n = 1$ $= \sup\limits_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$ فإن المتتالية $(f_n)_n$ لا تتقارب بانتظام على الفترة $[0,1]$ و كذلك على الفترة $[0,1[$. و هي متقاربة بانتظام على كل فترة $[0,a]$، لكل $a \in [0,1[$. هذا لأنّ $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$ $= \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sup\limits_{x \in [0,a]} x^n \right)$.

2 لتكن $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ لكل $x \in \mathbb{R}$. المتتالية متقاربة بانتظام و نهايتها الدالة الصفرية 0 على $\mathbb{R}$ لأن $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$.

3 لتكن $f_n(x) = \dfrac{x}{n+x}$ لكل $x \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.
المتتالية متقاربة و نهايتها 0 على $\mathbb{R}^+$ و بما أن $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^+} f_n(x) = 1$ ، فإن المتتالية ليست متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}^+$ و لكنها متقاربة بانتظام على كل فترة $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$.

4 لتكن $f_n(x) = xe^{-nx}$ لكل $x \in \mathbb{R}^+$. بما أن $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} f_n(x) = \frac{1}{n}$، فإن المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام و نهايتها 0 على $\mathbb{R}^+$.

5 لتكن $f_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$ لكل $x \in \mathbb{R}$.
المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة و نهايتها 0، و لكن $\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = \frac{1}{2e}$. إذًا المتتالية $(f_n)_n$ ليست متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$. من ناحية أخرى لكل $a > 0$، المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام على الفترة $[a, +\infty[$ لأن $\sup_{x\in[a,+\infty[} f_n(x) = f_n(a)$ بعد حد.

إختبار كوشي للتقارب

مبرهنة

(معيار كوشي للتقارب المنتظم)
لتكن $(f_n)_n$ متتالية دوال معرفة على مجموعة جزئية مفتوحة Ω في $\mathbb{R}$.
المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام على $A \subset \Omega$ إذا و فقط إذا

$$\lim_{p,q\to+\infty} \sup_{x\in A} |f_p(x) - f_q(x)| = 0.$$

و هذا متكافئ مع ما يلي:

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists N,\ \forall\ n \geq N,\ \forall\ p \in \mathbb{N},\ \sup_{x\in A} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

ملاحظة

إذا كانت المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام و نهايتها الدالة f على $\Omega \supset A$ فإن لكل متتالية $A \ni (x_n)_n$، المتتالية $\left(|f_n(x_n) - f(x_n)|\right)_n$ تتقارب و نهايتها 0.
هذا لأنّ $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$.

1. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ على $\mathbb{R}$.
$f_n(0) = 0$، و لكل $0 \neq x$، $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. و لكن $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$. إذاً التقارب غير منتظم

2. لتكن متتالية الدوال المعرفة بما يلي: $f_n(x) = n^2xe^{-nx}$ لكل $x \in [0,1]$.
$f_n(0) = 0$ و لكل $0 \neq x$، $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 1$. إذاً تقارب المتتالية $(f_n)_n$ على الفترة $[0,1]$ غير منتظم.

الإتصال و التقارب المنتظم

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال المعرفة على المجموعة $I =]a, b] \subset \mathbb{R}$، و متقاربة بانتظام و نهايتها f، حيث $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. نفترض أنّ $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = \ell_n$ موجودة لكل n. إذاً المتتالية $(\ell_n)_n$ متقاربة و

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to +\infty} \ell_n.$$

و

$$\lim_{x \to a} \Big(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \Big) = \lim_{n \to +\infty} \Big(\lim_{x \to a} f_n(x) \Big).$$

مثال

لتكن $f_n(x)=\int_0^n \frac{\sin t}{t}e^{-xt}dt$ $f_n(x)=\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}e^{-xt}dt$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$.
الدالة $\frac{e^{-xt}}{t}$ $t\longrightarrow$ تناقصية على الفترة $[n,m]$ و باستعمال مبرهنة (??) (الثاني:) صيغة لمبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل) فإن

$$|f_n(x)-f_m(x)|=\left|\int_n^m \frac{\sin t}{t}e^{-xt}dt\right|\leq \frac{e^{-xn}}{n}.2\leq \frac{2}{n}.$$

إذًا $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}+}|f_n(x)-f_m(x)|\leq \frac{2}{n}$ ، و هذا يثبت أنّ المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب على $\mathbb{R}^+$ و نهايتها الدالة f. من ناحية أخرى $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)=\int_0^n \frac{\sin t}{t}dt$ لأنّ

$$\left|f_n(x)-\int_0^n \frac{\sin t}{t}dt\right|\leq xn \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية دوال معرفة على مجموعة مفتوحة $I \subset \mathbb{R}$. نفترض أنّ

المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام و نهايتها دالة f على كل فترة مغلقة $I \supset [a, b]$، 1

لكل $n \in \mathbb{N}$، الدالة f_n متصلة عندالنقطة $c \in I$. 2

إذاً الدالة f متصلة عندالنقطة c.

مثال

1 لتكن $f_n(x) = \int_0^n \frac{\sin t}{t+x} dt$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$.
ليكن $a > 0$، $|f_n(x) - f_n(a)| \leq M_n(a)|x-a|$، $\forall x > \frac{a}{2}$، حيث
$M_n(a) = \int_0^n \frac{dt}{(t+a)(t+\frac{a}{2})}$. إذاً الدوال f_n متصلة على $]0, +\infty[$.
كذلك
$|f_n(x) - f_n(0)| \leq \left| \int_0^n \frac{\sin t}{t} (\frac{x}{t+x}) dt \right| \leq x(\ln(n+x) - \ln x)$. إذاً
$\lim\limits_{x \to 0} |f_n(x) - f_n(0)| = 0$ و بالتالي الدوال f_n متصلة عند 0.
باستعمال المبرهنة (??) (الثاني صيغة لمبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل) نحصل على:
$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{2}{n+x}$، لكل $n < m$ و $x > 0$.

إذاً

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)-f_m(x)| \leq \frac{2}{n}$$

و بالتالي المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}^+$.

و نستنتج أنّ الدالة $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}dt$ متصلة على $\mathbb{R}^+$.

2 لتكن $f_n(x)=\frac{1}{x}\int_0^{n}\frac{\sin t}{t+x}dt$، لكل $x>0$. الدوال f_n متصلة على $\mathbb{R}_+^*$.

المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب بانتظام على الفترات $[a,+\infty[$ لكل $a>0$. إذاً الدالة

$g(x)=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}dt$ متصلة على $\mathbb{R}_+^*$.

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال المتصلة على مجموعة مفتوحة $\Omega \subset \mathbb{R}$ و متقاربة بانتظام على كل فترة $[a, b] \subset \Omega$ و نهايتها دالة f. إذاً الدالة f متصلة على Ω.

التقارب المنتظم و قابلية التكامل

لتكن $(f_n)_n$ متتالية دوال قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$ و تتقارب و نهايتها دالة f.
عدة مسائل مطروحة منها

1. هل الدالة f قابلة لتكامل ريمان؟
2. إذا كانت الدالة f قابلة لتكامل ريمان على $[a, b]$، و هل

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt \text{ ؟}$$

مثلا الدالة $\begin{cases} f(x) = 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ f(x) = 0 & x \notin \mathbb{Q} \cap [a, b] \end{cases}$ ليست قابلة لتكامل ريمان و هي نهاية متتالية لدوال قابلة لتكامل ريمان (لأنّ المجموعة $\mathbb{Q}$ قابلة للعد).
أما المتتالية $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ المعرفة على $[0, 1]$ تحقق $\lim_{n\to+\infty} f_n = 0$ و

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية دوال قابلة لتكامل ريمان على فترة $[a, b]$. إذا كانت المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام و نهايتها دالة f فإنّ الدالة f قابلة لتكامل ريمان على $[a, b]$ و

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

كذلك المتتالية $(F_n)_n$ المعرفة بما يلي: $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$ متقاربة بانتظام و نهايتها الدالة F المعرفة بما يلي: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

التقارب و الإشتقاق

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال القابلة للمفاضلة باتصال (C^1) على فترة $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
نفترض أنّ

1. المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب نقطيا و نهايتها دالة f على $[a, b]$.
2. المتتالية $(f'_n)_n$ تتقارب بانتظام على $[a, b]$.

إذًا الدالة f قابلة للمفاضلة باتصال على $[a, b]$ و لكل $x \in [a, b]$،

$$f'(x) = \lim_{n \to +\infty} f'_n(x)$$

و $(f_n)_n$ تتقارب بانتظام و نهايتها الدالة f على $[a, b]$.

تمرين

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال قابلة للإشتقاق على فترة $[a, b]$. نفترض أنّ المتتالية $(f'_n)_n$ تتقارب بانتظام على $[a, b]$ و يوجد $x_0 \in [a, b]$ بحيث المتتالية $(f_n(x_0))_n$ تتقارب.

أثبت أنّ المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب بانتظام على الفترة $[a, b]$ و نهايتها دالة قابلة للإشتقاق f و $f'(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f'_n(x)$. (يمكن استعمال مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f_n - f_m$).

متسلسلات الدوال

تعريف

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال المعرفة على مجموعة جزئية A من $\mathbb{R}$.

1. نقول إن متسلسلة الدوال $\sum_{n\geq 1} f_n$ متقاربة نقطيا على المجموعة A إذا كانت المتتالية $\left(S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k\right)_n$ متقاربة نقطيا على A.
2. نقول إن متسلسلة الدوال $\sum_{n\geq 1} f_n$ متقاربة بانتظام على المجموعة A إذا كانت المتتالية $\left(S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k\right)_n$ متقاربة بانتظام على A.

ملاحظة

1. إذا كانت المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ متقاربة نقطيا و نهايتها دالة f على مجموعة A، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ لكل $x\in A$.
2. تكون المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ متقاربة نقطيا على مجموعة A إذا و فقط إذا، المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ تحقق معيار كوشي التالي:

$$\forall x\in A,\ \forall\varepsilon>0\ \exists N;\forall n\geq N,\ p\in\mathbb{N};\ \|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\|<\varepsilon.$$

3. إذا كانت المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام و نهايتها f على A فإنّ المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ متقاربة نقطيا و نهايتها f على A.

4. تكون المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام على مجموعة A إذا و فقط إذا كانت المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ تحقق معيار كوشي التالي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N; \forall n \geq N, p \in \mathbb{N};\ \sup_{x\in A}\left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

مثال

1 لتكن $(f_n)_n$ المتتالية المعرفة على الفترة $[0,1]$ كالتالي: $f_n(x)=x^n$.
المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ متقاربة نقطيا على الفترة $]-1,1[$ و نهايتها الدالة
$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.
إذا كان $|x|\geq 1$، $\lim_{n\to+\infty}|f_n(x)|\neq 0$ و بالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n(z)$ غير
متقاربة على $\mathbb{R}\setminus]-1,1[$.

2 إذا كان $x \geq 0$، نعرف متتالية الدوال $f_n(x) = \dfrac{\sin \frac{x}{n}}{n+x}$.
لكل $x > 0$، $\sin \dfrac{x}{n} = \dfrac{x}{n} - \dfrac{x^3}{6n^3} + O(\dfrac{1}{n^3})$.
إذًا

$$f_n(x) = \frac{x}{n(x+n)} - \frac{x^3}{6n^3(x+n)} + O(\frac{1}{n^3}).$$

المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n$ متقاربة نقطيا على $\mathbb{R}^+$.
المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n$ متقاربة نقطيا على $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$.

مثال

المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} x^n$ متقاربة نقطيا على $]-1,1[$ و نهايتها الدالة $f(x) = \frac{1}{1-x}$، و لكن المتسلسلة ليست متقاربة بانتظام.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]-1,1[} |S_n(z) - S(z)| &= \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]-1,1[} \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]-1,1[} \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| \\
&\geq \lim_{n\to+\infty} \frac{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1-(1-\frac{1}{n+1})} = +\infty
\end{aligned}$$

تعريف

نقول إنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ تتقارب معياريا على مجموعة A إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} \sup_{x\in A} \|f_n(x)\|$ متقاربة.

مبرهنة

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة معياريا على مجموعة A فهي متقاربة بانتظام على A.

نستعمل معيار كوشي للبرهان.

نتيجة

إذا كان $\sup_{x\in A} |f_n(x)| \leq a_n$ و المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n$ متقاربة، فإنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة معياريا على A.

مثال

1. لتكن $f_n(x) = \frac{e^{\mathrm{i}nx}}{n^\alpha}$، حيث $\alpha > 1$.
$|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$. إذاً المتسلسلة متقاربة معياريا على $\mathbb{R}$.
2. لتكن $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}$ على الفترة $]0, +\infty[$.
من المعلوم أن $xe^{-x} \leq 1$ لكل $x \in]0, +\infty[$، و إذا كان $a > 0$، فإن

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n} \leq \frac{1}{x.n^2} \leq \frac{1}{a.n^2}$$

لكل $x \in [a, +\infty[$. إذاً المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n$ متقاربة بانتظام على فترة $[a, +\infty[$ و لكل $a > 0$.

3 لتكن $f_n(x) = \frac{1}{n(x+n)}$ المعرفة على المجموعة $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*$.
ليكن $R > 0$، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $R < N$ و بالتالي فإن لكل $n \geq N$ و لكل $x \in [-R, R] \setminus \mathbb{Z}_-^*$،

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n|x+n|} \leq \frac{1}{n|n-|x||} \leq \frac{1}{n(n-R)}.$$

إذاً المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n$ متقاربة بانتظام على $[-R, R] \setminus \mathbb{Z}_-^*$.

معيار آبل للتقارب المنتظم

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ و $(g_n)_n$ متتاليتين من الدوال المعرفة على فترة $I \subset \mathbb{R}$. إذاً المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} f_n g_n$ متقاربة بانتظام على I إذا تحقق أحد الشروط التالية:

1. المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ متقاربة بانتظام على الفترة I و المتتالية $(g_n)_n$ محدودة و مطردة على الفترة I.
2. المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ محدودة بانتظام على الفترة I و المتتالية $(g_n)_n$ تناقصية ومتقاربة بانتظام و نهايتها 0 على الفترة I.

3 المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n$ متقاربة بانتظام على الفترة I و المتسلسلة $|g_0| + \sum_{n\geq 1} |g_n - g_{n+1}|$ محدودة على الفترة I.

مثال

1. لتكن $(a_n)_n$ متتالية من الأعداد الموجبة و تناقصية و نهايتها 0.
المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n e^{\mathrm{i}nx}$ تتقارب بانتظام على كل فترة $[a,b] \subset \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

2. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{\mathrm{i}nx}}{n+x}$ متقاربة نقطيا على المجموعة $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*$.
ليكن $R > 0$ و $N \in \mathbb{N}$ بحيث $N > R$. المتتالية $g_n(x) = \frac{1}{n+x}$ تناقصية و موجبة و لكل $n \geq N$، . و بالتالي المتسلسلة متقاربة بانتظام على $[-R, R] \setminus (\mathbb{Z}_- \cup 2\pi\mathbb{Z})$. و كحالة خاصة، المتسلسلة تتقارب بانتظام على كل فترة $[\delta, 2\pi - \delta]$ لكل $\delta > 0$.

3 لتكن متسلسلة الدوال $\sum_{n\geq 1} f_n$، حيث $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)\sin(n^2x)}{n}$. المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$.

نذكر بأن $2\sin(kx)\sin(k^2x) = \cos(k(k-1)x) - \cos(k(k+1)x)$.

المتتالية $(\frac{1}{n})_n$ تناقصية و نهايتها 0. من جهة أخرى

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos k(k-1)x - \cos k(k+1)x\right| = |1 - \cos n(n+1)x| \leq 2.$$

إذاً المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n$ تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$.

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال المعرفة على مجموعة مفتوحة Ω و متصلة عند نقطة $a \in \Omega$. نفترض أنّ المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام على Ω و نهايتها دالة f. إذاً الدالة f متصلة عند النقطة a.

نتيجة المبرهنة 13.

مبرهنة

لتكن Ω مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ و $(f_n)_n$ متتالية من الدوال المتصلة على مجموعة مفتوحة Ω.
إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام على كل فترة $[a, b] \subset \Omega$ و نهايتها f، فإنّ الدالة f متصلة على Ω.

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال القابلة لتكامل ريمان على فترة $[a, b]$. إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام على الفترة $[a, b]$ و نهايتها f. فإنّ الدالة f قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$ و

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\, dx.$$

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال القابلة للمفاضلة باتصال (C^1) على فترة $[a, b]$. نفترض أنّ

1. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة نقطيا على الفترة $[a, b]$ و نهايتها دالة f.
2. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f'_n$ تتقارب بانتظام على الفترة $[a, b]$.

إذاً f قابلة للمفاضلة باتصال (C^1) على الفترة $[a, b]$ و

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

كذلك المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ تتقارب بانتظام على الفترة $[a, b]$.

نتيجة

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال القابلة للمفاضلة باتصال (C^1) على فترة I. نفترض أنّ

1. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة نقطيا على الفترة I و نهايتها f،
2. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} f'_n$ متقاربة بانتظام على كل فترة $I \supset [a, b]$.

إذًا الدالة f قابلة للمفاضلة باتصال (C^1) و

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in I.$$

المحتويات

تعريف

لتكن $(a_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ تسمى متسلسلة قوى و مركزها x_0.

فيما يلي نبحث عن مجال التقارب للمتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$.
المتسلسلة تتقارب على الأقل عند النقطة $x = x_0$. في ما يلي، نعتبر متسلسلات القوى التي مركزها 0.

مبرهنة

(مبرهنة آبل)
إذا كانت متسلسلة القوى $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ متقاربة حيث $x_0 \neq 0$، فإنّ

1 المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ تتقارب مطلقا على الفترة $]-|x_0|, |x_0|[$،

2 لكل $|x_0| > r$، المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ تتقارب بانتظام على الفترة $[-r, r]$.

نتيجة

إذا كانت متسلسلة القوى $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ متباعدة، فالمتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ متباعدة لكل $|x| > |x_0|$.

مبرهنة

لكل متسلسلة القوى $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$، يوجد عدد وحيد $R \in [0, +\infty]$ يحقق ما يلي:

1. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ متقاربة مطلقا على الفترة $]-R, R[$ (إذا كان $R > 0$)
2. المتتالية $(a_n x^n)_n$ ليست محدودة و بالتالي المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ متباعدة لكل $x \in \mathbb{R}$، بحيث $|x| > R$. (إذا كان $R \neq +\infty$)

العدد R يسمى نصف قطر التقارب أو شعاع التقارب لمتسلسلة القوى و الفترة $]-R, R[= \{x \in \mathbb{R};\ |x| < R\}$ يسمى مجال التقارب لمتسلسلة القوى.

مبرهنة

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ متسلسلة قوى حيث شعاع تقاربها $R > 0$. إذاً

1 الدالة $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ قابلة للاشتقاق على الفترة $]-R, R[$ و

$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

2 R هو كذلك شعاع تقارب متسلسلة القوى $\sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$.

للبرهان نعطي هذه التمهيدية:

تمهيدية

ليكن $x \in \mathbb{R}$ و $h \in \mathbb{R}$ بحيث r $0 < |h| \leq$. إذاً لكل $n \in \mathbb{N}$

$$|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \leq \frac{|h|^2}{r^2}(|x|+r)^n \tag{1}$$

و

$$n|x|^{n-1} \leq \frac{1}{r}\big(2(|x|+r)^n + |x|^n\big). \tag{2}$$

البرهان

$$
\begin{aligned}
\left|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k h^k x^{n-k} - x^n - nhx^{n-1}\right| \\
&= \left|\sum_{k=2}^{n} C_n^k h^k x^{n-k}\right| \\
&\leq |h|^2 \sum_{k=2}^{n} C_n^k |x|^{n-k} |h|^{k-2} \\
&\leq \frac{|h|^2}{r^2} \sum_{k=2}^{n} C_n^k |x|^{n-k} r^k \\
&\leq \frac{|h|^2}{r^2} (|x| + r)^n.
\end{aligned}
$$

بما أنّ $|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \geq nr|x|^{n-1} - |x|^n - (|x|+r)^n$، فباستعمال المعادلة (1) نستنتج أن

$$nr|x|^{n-1} \leq |x|^n + (|x|+r)^n + |(x+r)^n - x^n - nrx^{n-1}| \leq |x|^n + 2(|x|+r)^n.$$

برهان

ليكن R' شعاع التقارب لمتسلسلة القوى $\sum_{n\geq 0} na_n x^{n-1}$. من البديهي أنّ $R \leq R'$.
ليكن $r > 0$ بحيث $|x| + r < R$. باستعمال التمهيدية 7 نستنتج:

$$|na_n x^{n-1}| \leq \frac{1}{r}\left(2|a_n|(|x| + r)^n + |a_n||x|^n\right)$$

و بالتالي المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} na_n x^{n-1}$ تتقارب مطلقا على الفترة $]-R, R[$. إذاً $R = R'$.

لتكن $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ لكل $x\in]-R,R[$. باستعمال المتباينة (1) نستنتج أنّ

$$|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)|\leq \frac{|h|}{r}\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|(|x|+r)^n$$

و هذا يبرهن أنّ $f'(x)=g(x)$، لكل $x\in]-R,R[$.

نتيجة

إذا كانت $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$ فإن الدالة f قابلة للمفاضلة لا نهائيا على $]-R, R[$،

$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ و $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. (هذه المتسلسلة تسمى متسلسلة تايلور للدالة f عند النقطة 0.

نتيجة

إذا كانت $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ فإن الدالة f قابلة للمفاضلة لا نهائيا على $]-R,R[$،

$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ و $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. (هذه المتسلسلة تسمى متسلسلة تايلور للدالة f عند 0. (Taylor's series of f at 0

1. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2 لكل $|x| < 1$،

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad , \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

$$\tanh^{-1} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

3 لتكن $f(x) = (1+x)^\alpha$ بحيث α عدد حقيقي، $\alpha \notin \mathbb{N}$. لكل $x \in]-1, 1[$؛
$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$. f تحقق المعادلة التفاضلية التالية:

$$(1+x)y' - \alpha y = 0, \quad y(0) = 1$$

نبحث عن دالة معرفة بمتسلسلة القوى $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ تكون حلا لهذه المعادلة التفاضلية.

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{2.3\dots(n+1)} a_0.$$

و بما أن حل المعادلة التفاضلية وحيد نستنتج أنّ لكل $x \in]-1, 1[$,

$$(1-x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{2.3\dots(n+1)} x^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n C_{2n}^n}{4^n}x^n \quad , \frac{1}{\sqrt{1-x}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{C_{2n}^n}{4^n}x^n$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n C_{2n}^n}{4^n(n+1)}x^{n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n C_{2n}^n}{4^n}x^{2n} \quad , \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{C_{2n}^n}{4^n}x^{2n}$$

$$\sin^{-1}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{C_{2n}^n}{4^n(2n+1)}x^{2n+1}$$

$$\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{C_{2n}^n}{4^n(2n+1)}x^{2n+1}$$

$$\sinh^{-1}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n C_{2n}^n}{4^n(2n+1)}x^{2n+1}$$

المحتويات

تمهيد

نقدم في هذا الباب نظرية قياس ليباق و نقارنها بنظرية تكامل ريمان. رأينا في باب تكامل ريمان أن نظرية تكامل ريمان لدالة على فترة مغلقة و محدودة $[a,b]$ تعتمد على تقريب المساحة المحصورة بين بيان الدالة و المحور (ox) بواسطة مستطيلات دقيقة بشكل متزايد. أما طريقة ليباق فترتكز على تجزيء $f([a,b]) \subset [A,B]$ على المحور (oy) أي نأخذ تجزيء $y_0 < \ldots < y_n$ للمجموعة $f([a,b])$ ثم نحصر مساحة المجموعات $E_k = f^{-1}([y_k, y_{k+1}[)$

جبر و سيجما جبر

تعريف

1 لتكن $\mathcal{A}$ تجمع من المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$. نقول إن $\mathcal{A}$ جبر إذا حققت ما يلي:

- $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$
- إذا كان $A \in \mathcal{A}$ فإن $A^c \in \mathcal{A}$ و يسمى الإغلاق بالنسبة للمكمل
- إذا كان $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ فإن $\cap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$، و يسمى الإغلاق بالنسبة لتقاطع محدود.

2 نقول إن المجموعة $\mathscr{A}$، سيجما جبر أو سيجما حقل إذا كانت جبر و لكل $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ في $\mathscr{A}$، فإن $\cap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{A}$. هذه الخاصية تسمى الإغلاق بالنسبة لتقاطع قابل للعد

3 إذا كانت $\mathscr{A}$ سيجما جبر، المجموعة $(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ تسمى **فضاء قياس**، و المجموعات الجزئية من $\mathscr{A}$ تسمى **مجموعات قابلة للقياس**.

ملاحظة

إذا كان $\mathcal{A}$ جبر، باستعمال مكمل المجموعات، نحصل على مايلي:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. إذا كان $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$، فإن $\cup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$ و يسمى الإغلاق بالنسبة للإتحاد المنته
3. إذا كانت $\mathscr{A}$ سيجما جبر و $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر في $\mathscr{A}$، فإن $\cup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathscr{A}$ و يسمى الإغلاق بالنسبة للإتحاد القابل للعد

مثال

1. $\mathscr{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ جبر و سيجما جبر. وهي أصغر سيجما جبر في $\mathscr{P}(\mathbb{R})$
2. $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{R})$ جبر و سيجما جبر وهي أكبر سيجما جبر في $\mathscr{P}(\mathbb{R})$
3. لتكن $\mathscr{A}$ تجمع المجموعات الجزئية A من $\mathbb{R}$ بحيث A أو A^c قابلة للعد. المجموعة $\mathscr{A}$ سيجما جبر.
$\emptyset \in \mathscr{A}$ و كذلك إذا كانت $A \in \mathscr{A}$، فإن $A^c \in \mathscr{A}$.

لتكن $(A_j)_j$ متتالية في $\mathscr{A}$. إذا وجدت مجموعة A_p قابلة للعد، فإن المجموعة $\cap_{j=1}^{+\infty} A_j \subset A_p$ قابلة للعد و بالتالي فإن $\cap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathscr{A}$ و أما إذا كانت كل المجموعات A_j غير قابلة للعد، فإن المجموعات A_j^c كلها قابلة للعد، و بالتالي المجموعة $\cup_{j=1}^{+\infty} A_j^c$ قابلة للعد و $\cap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathscr{A}$. إذاً المجموعة $\mathscr{A}$، سيجما جبر

4 لتكن A تجمع المجموعات الجزئية A في $\mathbb{R}$ بحيث A أو A^c له عدد منته من العناصر. المجموعة A جبر و ليست سيجما جبر

مبرهنة

كل تقاطع لمجموعات جبر هو جبر و كل تقاطع لمجموعات سيجما جبر هو سيجما جبر.

تعريف

لتكن $\mathcal{B} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ تجمع غير خال من المجموعات الجزئية في $\mathbb{R}$. يوجد أصغر جبر يحوي $\mathcal{B}$ و نرمز له بالرمز $\mathcal{A}(\mathcal{B})$. هذه المجموعة تسمى الجبر المولدة بالمجموعة $\mathcal{B}$. $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ هي تقاطع كل المجموعات الجبر التي تحوي $\mathcal{B}$ فهي بالتالي أصغر جبر يحوي $\mathcal{B}$.
كذلك يوجد أصغر سيجما جبر يحوي $\mathcal{B}$ و نرمز له بالرمز $\sigma(\mathcal{B})$. هذه المجموعة تسمى سيجما جبر المولدة بالمجموعة $\mathcal{B}$. $\sigma(\mathcal{B})$ هي تقاطع كل المجموعات سيجما جبر التي تحتوي على $\mathcal{B}$ فهي بالتالي أصغر سيجما جبر يحوي $\mathcal{B}$.

مثال

1. لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ بحيث $A \neq \emptyset$ و $A \neq \mathbb{R}$. سيجما جبر المولدة بالمجموعة $\{A\}$ هي $\{\emptyset, \mathbb{R}, A, A^c\}$.
2. إذا كان $\mathcal{F} = \{A, B, C\}$ تجزئ للمجموعة $\mathbb{R}$ فإن

$$\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}(\mathcal{F}) = \{\emptyset, \mathbb{R}, A, B, C, A \cup B = C^c, A \cup C = B^c, B \cup C = A^c\}$$

تمرين

لتكن $\mathscr{A}$ تجمع المجموعات الجزئية القابلة للعد أو مكملها قابل للعد.
أثبت أن المجموعة $\mathscr{A}$، سيجما جبر مولدة بالمجموعات $S = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$.

بوريل سيجما جبر

تعريف

سيجما جبر المولدة بالمجموعات $\{[a, b[: (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ تسمى بوريل سيجما جبر على $\mathbb{R}$ و نرمز لها بالرمز $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. كل عنصر من $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ يسمى مجموعة بوريل في $\mathbb{R}$.

ملاحظة

لتكن $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ تجمعين من المجموعات الجزئية في $\mathbb{R}$.

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B}) \iff \begin{cases} \forall A \in \mathcal{A} \quad A \in \sigma(\mathcal{B}) \\ \quad \& \\ \forall B \in \mathcal{B} \quad B \in \sigma(\mathcal{A}) \end{cases}$$

مبرهنة

$\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ مولدة باحدى المجموعات التالية:

1. $\{]a, b[: (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
2. المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$
3. المجموعات المغلقة في $\mathbb{R}$
4. $\{]a, +\infty[: \ a \in \mathbb{R}\}$
5. $\{]-\infty, a] : \ a \in \mathbb{R}\}$

قياس ليباق الخارجي

تعريف

نقول إن دالة $\mu^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ هو قياس خارجي على $\mathbb{R}$ إذا حققت الخصائص التالية:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. إذا كان $A \subset B$ فإن $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (نقول إن μ^* تزايدية)
3. إذا كانت $(A_n)_n$ متتالية من المجموعات الجزئية في $\mathbb{R}$، فإن

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n)$$

نعطي مثالا لقياس خارجي على $\mathbb{R}$ يساعدنا في تكوين مقياس ليباق على $\mathbb{R}$.

مبرهنة

لتكن $\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ تجمع من المجموعات الجزئية في $\mathbb{R}$ بحيث $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{A}$. إذا كانت $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ دالة حيث $\rho(\emptyset) = 0$. لكل مجموعة جزئية $A \subset \mathbb{R}$، نعرف

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{+\infty} \rho(A_n) : \ A_n \in \mathcal{A}, \ A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} A_n\} \qquad 1$$

الدالة μ^* قياس خارجي على $\mathbb{R}$.

إذا أخذنا $\mathcal{I}$ تجمع الفترات المفتوحة في $\mathbb{R}$ و الدالة $\rho(I) = \mathscr{L}(I)$ و التي تمثل طول الفترة. في هذه الحالة نرمز بالمقياس الخارجي بالرمز λ^* و نسميه قياس ليباق الخارجي.

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathscr{L}(I_n) : \ I_n \in \mathcal{I}, \ A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} I_n\}.$$

هذا المقياس الخارجي يحقق الخصائص التالية:

تمهيدية

لكل فترة I في $\mathbb{R}$، $\lambda^*(I) = \mathscr{L}(I)$.

تمهيدية

إذا كانت Ω مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ و $(I_n)_n$ أجزاءها المترابطة، فإن

$$\lambda^*(\Omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathscr{L}(I_n).$$

مبرهنة

لكل مجموعة جزئية $A \subset \mathbb{R}$،

$$\lambda^*(A) = \inf_{O \in \mathcal{O}_A} \lambda^*(O)$$

حيث $\mathcal{O}_A$ تجمع المجموعات المفتوحة التي تحوي المجموعة A.

و نستنتج من كل ماسبق المبرهنة التالية:

نتيجة

إذا كانت A مجموعة قابلة للعد في $\mathbb{R}$، فإن $\lambda^*(A) = 0$.

بما أن $\mathscr{L}([a, a]) = 0$، فإنه إذا كان $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$، فإن $\lambda^*\{a\} = 0$ ... $\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*\{a_n\} = 0$.

نتيجة

$\mathbb{R}$ و $[a, b]$ غير قابلة للعد، لكل $a \neq b$.

مبرهنة

لكل $A \subset \mathbb{R}$ و لكل $r \in \mathbb{R}$، فإن $\lambda^*(A+r) = \lambda^*(A)$ و $\lambda^*(rA) = |r|\lambda^*(A)$.

المجموعات القابلة للقياس

تعريف

ليكن μ^* قياس خارجي على $\mathbb{R}$.
نقول إن مجموعة جزئية A في $\mathbb{R}$ قابلة للقياس بالنسبة للقياس الخارجي μ^* إذا حققت الشرط التالي:

$$\forall X \subset \mathbb{R} : \quad \mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c).$$

مبرهنة

إذا كانت $\mathscr{B}$ تجمع المجموعات القابلة للقياس في $\mathbb{R}$ بالنسبة للقياس الخارجي μ^*، فإن $\mathscr{B}$ سيجما جبر.

مبرهنة

كل مجموعة بورل قابلة للقياس أي $\mathscr{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathscr{B}$.

تمرين

نقول إن مجموعة جزئية $A \subset \mathbb{R}$ صفرية بالنسبة للقياس الخارجي λ^* إذا وجدت مجموعة B قابلة للقياس بحيث $A \subset B$ و $\lambda^*(B) = 0$.
أثبت أن كل مجموعة صفرية قابلة للقياس.
الحل
إذا كانت A مجموعة صفرية، فإنه يوجد $B \in \mathscr{B}$ بحيث $A \subset B$ و $\lambda^*(B) = 0$. إذا كانت X مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$، فإن $\lambda^*(X \cap A) = 0$ و

$$\lambda^*(X) \geq \lambda^*(X \cap A^c) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c).$$

و المتباينة العكسية تنتج من تعريف القياس الخارجي λ^*. إذاً المجموعة A قابلة للقياس بالنسبة للقياس الخارجي λ^*.

نظرية القياس

تعريف

لتكن $\mathscr{A}$ سيجما جبر في $\mathbb{R}$. نقول إن دالة $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ قياس (قياس موجب) على $\mathscr{A}$ إذا حققت الشروط التالية:

1. $\mu(\emptyset) = 0$،
2. لكل متتالية منفصلة $(A_n)_n \in \mathscr{A}$، $\mu(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$ (خاصية التجميع القابل للعد)

المجموعة $(\mathbb{R}, \mathscr{A}, \mu)$ تسمى فضاء قياسي.

مثال

1. إذا كانت $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{R})$ و $\mu(A) = \#A$ (عدد عناصر المجموعة A إذا كانت A منتهية و $+\infty$ في الحالة الأخرى). الدالة μ قياس على $\mathscr{A}$. هذا القياس يسمى قياس العد (the counting measure).
2. إذا كان $a \in \mathbb{R}$، نعرف $\delta_a(A) = 1$ إذا كان $a \in A$ و 0 إذا كان $a \notin A$. δ_a قياس و يسمى قياس نقطي عند النقطة a (point mass at a) أو قياس ديراك عند النقطة a (the Dirac measure at a).

3 لتكن μ الدالة المعرفة على $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ بما يلي: $\mu(A) = 0$ إذا كانت المجموعة A منتهية و $\mu(A) = +\infty$ إذا كانت المجموعة A غير منتهية.
الدالة μ لا تحقق خاصية التجميع القابل للعد بما أن $\mathbb{N} = \cup_{n=1}^{+\infty}\{n\}$، و لكن

$\mu(\mathbb{N}) = +\infty \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{n\}) = 0$ و بالتالي الدالة μ ليست قياسا.

مبرهنة

لتكن $\mathscr{A}$ سيجما جبر في $\mathbb{R}$ و μ قياسا على $\mathscr{A}$. القياس μ يحقق الخواص التالية:

1 إذا كانت $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ عدد منته من المجموعات الجزئية المنفصلة، فإن

$$\mu(\cup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

2 إذا كان $A, B \in \mathscr{A}$ حيث $A \subset B$، فإن $\mu(A) \leq \mu(B)$. (μ مطردة)

3 خاصية ما دون التجميع القابل للعد: إذا كانت $(A_n)_n \in \mathscr{A}$ و $A = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$، فإن

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

4 إذا كانت $(A_n)_n$ متتالية تزايدية في $\mathscr{A}$ و $A = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$، فإن

$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

5 إذا كان $A, B \in \mathscr{A}$ و $A \subset B$ و $\mu(B) < +\infty$، فإن $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ (النتيجة تبقى صحيحة إذا كانت $\mu(A) < \infty$).

6 لتكن $(A_n)_n$ متتالية تناقصية في $\mathscr{A}$ و $A_n = \lim_{n\to+\infty} A_n = \cap_{n=1}^{+\infty} A_n = A$. إذا كانت $\mu(A_1) < \infty$، فإن $\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.

تمرين

ليكن $\mathscr{A}$ سيجما جبر على $\mathbb{R}$ و $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ دالة على $\mathscr{A}$.
أثبت أن μ قياس إذا و فقط إذا :

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$، إذا كان $A \cap B = \emptyset$.
3. إذا كانت $(A_n)_n$ متتالية تزايدية في $\mathscr{A}$، فإن

$$\mu(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

الحل

إذا كانت μ قياسا، فإنها تحقق الخاصيتين 1. و 2. لتكن $(A_n)_n$ متتالية تزايدية في $\mathscr{A}$، و لتكن $B_1 = A_1$ و $B_n = A_n \setminus \cup_{j=1}^{n-1} A_j$ لكل $n \in \mathbb{N}$. المتتالية $(B_n)_n$ منفصلة و $\cup_{n=1}^{+\infty} B_n = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$. إذاً

$$\begin{aligned}
\mu\left(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mu(\cup_{j=1}^{n} B_j) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)
\end{aligned}$$

عكسيا، إذا كانت دالة μ تحقق الخصائص 1. 2. و 3. و $(A_n)_n$ متتالية منفصلة من المجموعات القابلة للقياس. المتتالية $\left(B_n = \cup_{j=1}^{n} A_j\right)_n$ تزايدية و $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n = \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$. إذاً

$$\mu(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

مبرهنة أحادية القياس

مبرهنة

ليكن μ و ν قياسين على الفضاء $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ حيث يوجد فصل $\mathscr{C}$ من المجموعات القابلة للقياس يحقق الخصائص التالية:

1. $\mathbb{R} \in \mathscr{C}$ و إذا كانت $A, B \in \mathscr{C}$، فإن $A \cap B \in \mathscr{C}$
2. $\mathscr{C}$ تولد سيجما الجبر $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. $(\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$
3. $\mu(C) = \nu(C) < +\infty$ لكل $C \in \mathscr{C}$

إذاً $\mu = \nu$

ملاحظة

نفترض أن القياسين μ و ν يحققان فرضيات المبرهنة (34) نعرف مجموعة تقاطع القياسين التالية $\mathscr{F}=\{A\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}}:\ \mu(A)=\nu(A)\}$. الفصل $\mathscr{F}$ يحقق الخصائص التالية:

1. إذا كانت $A\in\mathscr{F}$، فإن $A^c\in\mathscr{F}$ و ذلك لأن $\mu(A^c)=\mu(\mathbb{R})-\mu(A)=\nu(\mathbb{R})-\nu(A)=\nu(A^c)$.
2. إذا كانت $A,B\in\mathscr{F}$ و $A\subset B$، فإن $B\cap A^c\in\mathscr{F}$: $\mu(A)+\mu(B\cap A^c)=\nu(A)+\nu(B\cap A^c)$ و بالتالي فإن $\mu(B\cap A^c)=\nu(B\cap A^c)$
3. إذا كانت $(A_n)_n$ متتالية مطردة من المجموعة $\mathscr{F}$، فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

مبرهنة

لتكن $\mathscr{F} \ni A$. المجموعة: $\tilde{A} = \{B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}} : \; A \cup B, B \cap A^c, A \cap B^c \in \mathscr{F}\}$ سيجما جبر في $\mathscr{P}(\mathbb{R})$

نتيجة

لكل $A \in \mathscr{C}$، $\tilde{A} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

البرهان

إذا كان $A, B \in \mathscr{C}$، فإن $A \cap B \in \mathscr{C}$ و بالتالي فإن $\mu(A \cap B) = \nu(A \cap B)$. من ناحية أخرى، بما أن $\mu(A) = \nu(A)$، فإن $\mu(A \cap B^c) = \nu(A \cap B^c)$ و كذلك $\mu(A^c \cap B) = \nu(A^c \cap B)$ و بالتالي فإن $\mu(A \cup B) = \nu(A \cup B)$. إذاً $\tilde{A}$ سيجما جبر و بما أنها تحوي $\mathscr{C}$ فإن $\tilde{A} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

مبرهنة

لتكن μ و ν قياسين على الفضاء القياسي $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ و نفترض أنه يوجد فصل $\mathscr{C}$ من المجموعات القابلة للقياس تحقق الخصائص التالية:

1. إذا كانت $A, B \in \mathscr{C}$، فإن $A \cap B \in \mathscr{C}$
2. $\mathscr{C}$ تولد سيجما جبر $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$
3. $\mu(C) = \nu(C) < +\infty$ لكل $C \in \mathscr{C}$
4. توجد $(X_n)_n$ متتالية تزايدية في $\mathscr{C}$ بحيث $X_n \lim_{n\to+\infty} = \mathbb{R}$.

إذاً $\mu = \nu$

قياس ليباق

مبرهنة

اختصار قياس ليباق الخارجي λ^* على سيجما الجبر $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ قياس. نرمز بهذا القياس بالرمز λ و يسمى قياس ليباق على $\mathbb{R}$. λ هو القياس الوحيد على $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ الذي يحقق الخصائص التالية:

1. $\lambda([0,1]) = 1$
2. $\lambda(A+x) = \lambda(A)$، لكل $x \in \mathbb{R}$ و لكل $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. (نقول أن λ لا متغيرة بالإنسحاب)

ملاحظة

في الحقيقية مقياس لبياق λ يمكن تعريفه على سيحما الجبر $\mathscr{B}^* = \mathscr{B} \cup \mathscr{N}$ حيث $\mathscr{N}$ تجمع المجموعات الصفرية و قد أثبتنا أن $\mathscr{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{B}^*$.

خصائص عامة للدوال القابلة للقياس

في ما يلي Ω مجموعة قابلة للقياس في $\mathbb{R}$.

تعريف

نقول إن دالة $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة للقياس إذا كان $f^{-1}(A) \in \mathscr{B}$ لكل مجموعة بوريل A ($A \in \mathscr{B}$).
سنرمز لمجموع الدوال القابلة للقياس على Ω بالرمز $\mathscr{M}(\Omega)$ و لمجموع الدوال الموجبة و القابلة للقياس على Ω بالرمز $\mathscr{M}^{+}(\Omega)$.

مبرهنة

لتكن $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة. التقارير التالية متكافئة

1. الدالة f قابلة للقياس.
2. $f^{-1}[a,+\infty[\in \mathscr{B}$ لكل $a\in\mathbb{R}$
3. $f^{-1}]-\infty, a[\in \mathscr{B}$ لكل $a\in \mathbb{R}$
4. $f^{-1}]-\infty, a] \in \mathscr{B}$ لكل $a\in\mathbb{R}$
5. $f^{-1}]a, b[\in \mathscr{B}$ لكل $a \in \mathbb{R}$
6. $f^{-1}[a, b[\in \mathscr{B}$ لكل $a, b \in \mathbb{R}$

هذه المبرهنة هي نتيجة أن سيجما جبر بورال $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ مولدة بأي واحدة من المجموعات التالية:

1. $\{[a, +\infty[: \ a \in \mathbb{R}\}$
2. $\{]a, +\infty[: \ a \in \mathbb{R}\}$
3. $\{]-\infty, a[: \ a \in \mathbb{R}\}$
4. $\{]-\infty, a] : \ a \in \mathbb{R}\}$
5. $\{]a, b[: \ a, b \in \mathbb{R}\}$
6. $\{[a, b[: \ a, b \in \mathbb{R}\}$
7. $\{]a, b] : \ a, b \in \mathbb{R}\}$
8. $\{[a, b] : \ a, b \in \mathbb{R}\}$

ملاحظة

إذا كانت Ω مجموعة مفتوحة، كل دالة $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، قابلة للقياس.

خصائص الدوال القابلة للقياس

مبرهنة

1. إذا كانت $f \in \mathscr{M}(\Omega)$، فإن الدالة $|f| \in \mathscr{M}(\Omega)$
2. إذا كانت $(f_n)_n$ متتالية في $\mathscr{M}(\Omega)$، فإن الدوال التالية قابلة للقياس

$$g = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$$
$$h = \overline{\lim}_{n \to +\infty} f_n$$
$$k = \underline{\lim}_{n \to +\infty} f_n$$

نتيجة

1. إذا كانت $f \in \mathscr{M}(\Omega)$، فإن الدوال $f^{+} = \sup(f, 0)$ و $f^{-} = \inf(f, 0)$ قابلة للقياس.
2. إذا كانت $(f_n)_n$ متتالية من الدوال القابلة للقياس و متقاربة ونهايتها f، فإن الدالة f قابلة للقياس.
3. إذا كانت $(f_n)_n$ متتالية من الدوال القابلة للقياس و إذا كانت C مجموعة النقاط $x \in \Omega$ حيث تكون المتتالية $(f_n)_n(x)$ لها نهاية في $\overline{\mathbb{R}}$، فإن المجموعة C قابلة للقياس .

الدوال البسيطة

تعريف

نقول إن دالة $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}(\overline{\mathbb{R}})$ بسيطة إذا كانت قابلة للقياس و تأخذ عدد منته من القيم.

إذا كانت $f\colon \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ دالة بسيطة و إذا كانت $\{c_1, \ldots, c_m\}$ قيم الدالة المختلفة، فإن $f = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{A_j}$، حيث $A_j = f^{-1}\{c_j\}$. و الدالة f قابلة للقياس إذا و فقط إذا كانت المجموعات A_j قابلة للقياس لكل $j = 1, \ldots, m$.

مبرهنة

لتكن $f\colon \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

1. إذا كانت الدالة f قابلة للقياس و محدودة، توجد متتالية من الدوال البسيطة متقاربة بانتظام على Ω و نهايتها f.
2. إذا كانت الدالة f موجبة و قابلة للقياس، توجد متتالية موجبة و تزايدية من الدوال البسيطة و نهايتها f.

تكامل ليباق

لتعريف تكامل ليباق للدوال القابلة للقياس، نعرف أولا تكامل الدوال البسيطة والموجبة. بعدها نعرف تكامل ليباق للدوال الموجبة والقابلة للقياس.

تعريف

إذا كانت $f=\sum_{k=1}^{N} c_k\chi_{\{f=c_k\}}$ دالة موجبة و بسيطة، نعرف تكامل ليباق للدالة f بما يلي:

$$\int_\Omega f(x)\,d\lambda(x)=\sum_{k=1}^{N} c_k\lambda(\{f=c_k\}). \qquad 2$$

مبرهنة

لتكن $\mathscr{E}^+$ مجموعة الدوال البسيطة و الموجبة المعرفة على Ω. تكامل الدوال في $\mathscr{E}^+$ يحقق الخصائص التالية:

1. $\int_\Omega \alpha\, f(x)\, d\,\lambda(x) = \alpha \int_\Omega f(x)\, d\,\lambda(x)$ لكل $\alpha \in \mathbb{R}^+$ و لكل $f \in \mathscr{E}^+$
2. $\int_\Omega (f+g)(x)\, d\lambda(x) = \int_\Omega f(x)\, d\,\lambda(x) + \int_\Omega g(x)\, d\lambda(x)$ لكل $f, g \in \mathscr{E}^+$
3. $\int_\Omega f(x)\, d\,\lambda(x) \leq \int_\Omega g(x)\, d\,\lambda(x)$ لكل $f, g \in \mathscr{E}^+$ حيث $f \leq g$

4 إذا كانت $(f_n)_n$ متتالية تزايدية في $\mathscr{E}^+$ و إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} f_n = f \in \mathscr{E}^+$ ،
فإن $\int_\Omega f(x)\,d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(x)\,d\lambda(x)$

تمهيدية

لتكن $(f_n)_n$ متتالية تزايدية في $\mathscr{E}^+$ و إذا كانت $g \in \mathscr{E}^+$ بحيث $g \leq \lim_{n\to+\infty} f_n$، فإن $\int_\Omega g(x)\,d\,\lambda(x) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,d\,\lambda(x)$.

تعريف

لتكن f دالة موجبة قابلة للقياس، نعرف تكامل الدالة كما يلي:

$$\int_{\Omega} f(x)\,d\lambda(x) = \sup\{\int_{\Omega} g(x)\,d\lambda(x) : g \leq f,\ g \in \mathscr{E}^{+}\}$$

هذا العدد حقيقي موجب أو $+\infty$.

ملاحظة

إذا كانت f دالة موجبة قابلة للقياس، فحسب المبرهنة (48) توجد متتالية تزايدية $(f_n)_n$ في $\mathscr{E}^+$ متتقاربة و نهايتها الدالة f. و نستنتج مما سبق أن $\int_\Omega f(x)\,d\lambda(x) \leq \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(x)\,d\lambda(x)$. من ناحية أخرى حسب التمهيدية (52) فإن كل دالة $g \in \mathscr{E}^+$، حيث $g \leq f = \lim_{n\to+\infty} f_n$، فإنها تحقق $\int_\Omega g(x)\,d\lambda(x) \leq \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(x)\,d\lambda(x)$.

إذاً حسب التعريف (53) $\int_\Omega f(x)\,d\lambda(x) \leq \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(x)\,d\lambda(x)$. و بالتالي فإن

$$\int_\Omega f(x)\,d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(x)\,d\lambda(x).$$

هذه النتيجة غير مرتبطة بالمتتالية $(f_n)_n$ في $\mathscr{E}^+$ التي تتقارب و نهايتها الدالة f. و بالتالي نحصل على المبرهنة التالية:

مبرهنة

لتكن f و g في $\mathscr{M}^+(\Omega)$ و إذا كان $\alpha \geq 0$ فإن

1. $$\int_\Omega \alpha f(x)\, d\lambda(x) = \alpha \int_\Omega f(x)\, d\lambda(x)$$
2. $$\int_\Omega (f+g)(x)\, d\lambda(x) = \int_\Omega f(x)\, d\lambda(x) + \int_\Omega g(x)\, d\lambda(x)$$
3. إذا كان $f \leq g$، فإن $\int_\Omega f(x)\, d\lambda(x) \leq \int_\Omega g(x)\, d\lambda(x)$

تعريف

لتكن f, g دالتين. نقول إن $f = g$ خارج مجموعة صفرية أو $f = g$ a.e. إذا كانت المجموعة $\{x \in \Omega : \ f(x) \neq g(x)\}$ مجموعة صفرية. و إذا كانت مجموعة A قابلة للقياس، فإن الدالة $\chi_A = 0$ a.e. إذا و فقط إذا $\lambda(A) = 0$.

تعريف

نقول إن دالة f معرفة .a.e على Ω إذا وجدت مجموعة صفرية N بحيث تكون الدالة f معرفة على $\Omega \setminus N$.

تعريف

نقول إن متتالية $(f_n)_n$ معرفة على Ω متقاربة .a.e و نهايتها دالة f إذا كانت المجموعة $\{x \in \Omega : f_n(x) \not\longrightarrow f(x)\}$ مجموعة صفرية.

مبرهنة

لتكن f, g دالتين في $\mathscr{M}^+(\Omega)$.

1 $\int_\Omega f(x)d\lambda(x) = 0$ إذا و فقط إذا $f = 0$ a.e.

2 إذا كانت $f = g$ a.e فإن $\int_\Omega f(x)d\lambda(x) = \int_\Omega g(x)\lambda(x)$

تعريف

لتكن $f\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ دالة قابلة للقياس. نعرف الدالتين $f^{+} = \sup(f, 0)$ و $f^{-} = \sup(-f, 0)$. إذاً $f = f^{+} - f^{-}$ و $|f| = f^{+} + f^{-}$.
نقول إن الدالة f قابلة لتكامل ليباق إذا كانت $\int_{\Omega} f^{+}(x)d\lambda(x)$ و $\int_{\Omega} f^{-}(x)d\lambda(x)$ في $\mathbb{R}$ و

$$\int_{\Omega} f(x)d\lambda(x) = \int_{\Omega} f^{+}(x)d\lambda(x) - \int_{\Omega} f^{-}(x)d\lambda(x)$$

يرمز لتكامل الدالة f إذا كانت قابلة لتكامل ليباق. كذلك إذا كانت الدالة f قابلة للقياس و $\int_\Omega f^+(x)d\lambda(x) < +\infty$ أو $\int_\Omega f^-(x)d\lambda(x) < +\infty$ سنرمز بنفس الرمز لتكامل ليباق للدالة على Ω.
نرمز لمجموعة الدوال القابلة لتكامل ليباق على Ω بالرمز $\mathcal{L}^1(\Omega)$.

مبرهنة

المجموعة $\mathcal{L}^1(\Omega)$ فضاء متجهات على $\mathbb{R}$ و الدالة $f \longmapsto \int_\Omega f(x)\,d\,\lambda(x)$ شكل خطي على الفضاء $\mathcal{L}^1(\Omega)$ و

$$\left|\int_\Omega f(x)\,d\,\lambda(x)\right| \leq \int_\Omega |f(x)|\,d\,\lambda(x)$$

لكل $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

نتيجة

1 إذا كانت الدالة f قابلة للقياس و $a \leq f \leq b$ و $\lambda(\Omega) < +\infty$، فإن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ و $a\lambda(\Omega) \leq \int_\Omega f(x)\ d\lambda(x) \leq b\lambda(\Omega)$.

2 إذا كانت الدالة f قابلة للقياس و $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ و $f \leq g$، فإن $\int_\Omega f(x)\, d\lambda(x) \leq \int_\Omega g(x)\, d\lambda(x)$.

3 إذا كانت E مجموعة صفرية قابلة للقياس، فإن $\int_E f(x)\, d\lambda(x) = 0$ لكل دالة قابلة للقياس f.

ملاحظة

1. إذا كانت دالة f قابلة للتكامل فإن $\{x \in \Omega : \ f(x) = \pm\infty\}$ مجموعة صفرية.
2. مجموعة الدوال $f = 0$ a.e. هو فضاء جزئي من فضاء المتجهات $\mathcal{L}^1(\Omega)$ و مغلق بالنسبة للعمليات $(\sup, \inf)$. سنرمز بالرمز $L^1(\Omega)$ خارج القسمة الفضاء $\mathcal{L}^1(\Omega)$ بفضاء الدوال الصفرية a.e.
نقول أن دالتين f, g متساويتين في $L^1(\Omega)$ إذا كانت $f = g$ a.e..

مبرهنة التقارب المطرد

مبرهنة

[مبرهنة التقارب المطرد]
إذا كانت $(f_n)_n \in \mathscr{M}^+(\Omega)$، فإن

$$\int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\, d\lambda(x).$$

البرهان:
لكل عدد طبيعي n، توجد متتالية تزايدية موجبة $(\varphi_{n,j})_j$ في $\mathscr{E}^+$ تتقارب و نهايتها f_n.
لكل j، نعرف $\psi_j = \sup\limits_{1\le n\le j} \varphi_{n,j}$. المتتالية $(\psi_j)_j \in \mathscr{E}^+$ تزايدية لأن

$$\psi_j = \sup_{1\le n\le j} \varphi_{n,j} \le \sup_{1\le n\le j} \varphi_{n,j+1} \le \sup_{1\le n\le j+1} \varphi_{n,j+1} = \psi_{j+1}.$$

لكل $n \leq j$، $\varphi_{n,j} \leq \psi_j$ و بالتالي $\lim_{j\to+\infty} \psi_j \geq \lim_{j\to+\infty} \varphi_{n,j} = f_n$. إذاً $\psi_j \lim_{j\to+\infty} \geq f_n \lim_{n\to+\infty} = f$. من ناحية أخرى المتباينات $\varphi_{n,j} \leq f_n \leq f$ تثبت أن $\psi_j \leq f$ و $\lim_{j\to+\infty} \psi_j \leq f$. المتتالية $(\psi_j)_j$ تزايدية في $\mathscr{E}^+$ و نهايتها الدالة f. إذاً $\int_\Omega \psi_j(x)\,d\,\lambda(x) \lim_{j\to+\infty} = \int_\Omega f(x)\,d\,\lambda(x)$. من ناحية أخرى $\psi_j \leq f_j$. إذاً

$$\lim_{j\to+\infty}\int_\Omega \psi_j(x)\,d\,\lambda(x) \leq \lim_{j\to+\infty}\int_\Omega f_j(x)\ \,d\,\lambda(x) \leq \int_\Omega f(x)\,d\,\lambda(x).$$

نتيجة

إذا كانت $(f_n)_n \in \mathscr{M}^+(\Omega)$، فإن

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,d\lambda(x).$$

نتيجة

إذا كانت $\mathscr{M}^+(\Omega)$ $f \in$، فإن لكل $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$، الدالة

$$\mu(A) = \int_\Omega f(x)\chi_A(x)\,d\lambda(x)$$

قياس على $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

تمهيدية فاتو

تمهيدية

[تمهيدية فاتو]
إذا كانت $(f_n)_n \in \mathscr{M}^+(\Omega)$، فإن

$$\int_\Omega \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x)\,d\lambda(x) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,d\lambda(x).$$

مثال

لتكن $f_n = n^2\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$، $\int_{\mathbb{R}} \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x)\,d\lambda(x) = 0$ و

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,d\lambda(x) = +\infty$$

مبرهنة التقارب المسقوف

مبرهنة

[مبرهنة التقارب المسقوف أو مبرهنة ليباق]
لتكن $(f_n)_n \in \mathscr{M}(\Omega)$. نفترض أن

1 المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب .a.e و نهايتها دالة f معرفة .a.e

2 توجد دالة موجبة قابلة للتكامل g بحيث: $|f_n| \leq g$ .a.e لكل n.

إذًا المتتالية $(f_n)_n$ و الدالة f قابلة للتكامل و

$$\int_\Omega f(x)\ d\lambda(x) \ = \ \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x) d\lambda(x).$$

مبرهنة

لتكن $(f_n)_n \in \mathscr{M}(\Omega)$. نفترض أنه توجد دالة موجبة قابلة للتكامل g بحيث لكل n، $|f_n| \leq g$ a.e. إذاً

$$\int_\Omega \underline{\lim} f_n(x)\,d\lambda(x) \leq \underline{\lim} \int_\Omega f_n(x)\,d\lambda(x) \tag{3}$$

$$\int_\Omega \overline{\lim} f_n\,d\lambda(x) \geq \overline{\lim} \int_\Omega f_n(x)\,d\lambda(x) \tag{4}$$

إذا كانت المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب a.e. على Ω و نهايتها دالة قابلة للقياس f معرفة a.e. فإن $f \in L^1(\Omega)$ و

$$\int_\Omega f(x)\,d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(x)\,d\lambda(x) \tag{5}$$

تمرين

لتكن f دالة قابلة للتكامل على $[0,+\infty[$. أوجد

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-n\sin^2 x} f(x)\,dx.$$

الحل لتكن $(f_n)_n$ المتتالية المعرفة بما يلي: $f_n(x)=e^{-n\sin^2 x}f(x)$ على $[0,\infty[$.
$A=\{x:\ f(x)=\pm\infty\}\cup\{n\in\mathbb{Z}:\ n\geq 0\}$. لكل $x\notin A$،
$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0$ و $|f_n|\leq|f|$ و الدالة f قابلة للتكامل. إذاً

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-n\sin^2 x} f(x)\,dx=0.$$

تكامل ريمان و تكامل ليباق

ليكن λ قياس ليباق على $\mathscr{B}$ سيجما جبر الدوال القابلة لقياس ليباق على الفترة $[a, b]$. إذا كانت $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة لتكامل ريمان، فإن $\int_a^b f(x)\,dx$ يرمز لتكامل ريمان للدالة f على الفترة $[a, b]$ و إذا كانت الدالة قابلة لتكامل ليباق على الفترة $[a, b]$، فإن $\int_{[a,b]} f(x)\,d\lambda(x)$ يرمز لتكامل ليباق للدالة f على الفترة $[a, b]$.

مبرهنة

لتكن f دالة محدودة على فترة $[a, b]$. إذا كانت f قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$، فإن الدالة f قابلة لتكامل ليباق $[a, b]$ و

$$\int_{[a,b]} f(x)\, d\,\lambda(x) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

مبرهنة

لتكن f دالة محدودة على فترة $[a, b]$.

1 الدالة f قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$ إذا و فقط إذا كانت مجموعة النقاط حيث تكون الدالة f غير متصلة مجموعة صفرية.

2 عكسيا، إذا كانت مجموعة النقاط حيث تكون الدالة f غير متصلة مجموعة صفرية، فإن الدالة f قابلة لتكامل ليباق و

$$\int_{[a,b]} f(x)\, d\,\lambda(x) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

للبرهان نحافظ على نفس الرموز للمبرهنة (77) و نحتاج التمهيدية التالية:

تمهيدية

لكل $\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\sigma_n\right) \setminus [a,b] \ni x$، $g(x)=h(x)$ إذا و فقط إذا كانت الدالة f متصلة عند النقطة x.

نعطي الآن برهان آخر للمبرهنة التالية:

مبرهنة

لتكن $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة محدودة. الدالة f قابلة لتكامل ريمان إذا و فقط إذا كانت متصلة a.e. على الفترة $[a, b]$.

التكامل المعتل و تكامل ليباق

مبرهنة

لتكن $f\colon \,]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة لتكامل ليباق على كل فترة مغلقة و محدودة في $]a, b[$.
الدالة f قابلة لتكامل ليباق على الفترة $]a, b[$ إذا و فقط إذا كان التكامل المعتل $\int_a^b |f(x)|\,dx$ متقارب و في هذه الحالة، التكامل المعتل و تكامل ليباق للدالة f متساويان:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,d\lambda(x).$$