حل الإختبار الفصلي الثاني

الفصل الصيفي 1438 – 1439 هـ 244 ريض

السؤال الأول (3 درجات)

(١). بما أن رتبة المصفوفة A هي 4، فإن 4 أعمدة من المصفوفة تكون أساسا للفضاء العمودي. إذًا أعمدة المصفوفة تولد الفضاء $\mathbb{R}^4$.

(٢). بما أن بعد الفضاء $\mathcal{P}_2$ هو 3 فيكفي أن نبحث عن قيم λ حتى تكون المجموعة C مستقلة خطيا.
ليكن $a, b, c \in \mathbb{R}$ بحيث $a(1+X-2X^2)+b(1-X+X^2)+c(2+\lambda X-X^2) = 0$
فنتحصل على النظام الخطي التالي:

$$\begin{cases} a+b+2c &= 0 \\ a-b+\lambda c &= 0 \\ -2a+b-c &= 0 \end{cases}$$

محدد هذا النظام يساوي -3λ.
إذًا تكون المجموعة C أساسا للفضاء $\mathcal{P}_2$ إذا كان $\lambda \neq 0$.

السؤال الثاني (6 درجات)

(١). المتجه $(0,1,1)$ ينتمي للفضاء F إذا كان النظام التالي متسقا

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة الموسعة للنظام هي $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$ و

بالتالي المتجه $(0,1,1)$ لا ينتمي للفضاء F.

(٢). حسب الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة الموسعة للنظام السابق فإن $\{u_1, u_2\}$ يكون أساسا للفضاء F.

(٣). بما أن المتجه $(0,1,1)$ لا ينتمي للفضاء F فإن $\{u_1, u_2, (0,1,1)\}$ يكون أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$

السؤال الثالث (6 درجات)

(١). $${}_C P_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (2)

(٢). $${}_B P_C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ (2)

(٣). $$[v]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, [v]_B = {}_B P_C [v]_C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$ (1) (1)

السؤال الرابع (4 درجات)

المصفوفة (1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
هي الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A.

(١). $\{(1,0,0,0,0,\frac{3}{4}), (0,1,0,2,0,-\frac{1}{4}), (0,0,1,0,0,0), (0,0,0,0,1,\frac{1}{4})\}$ (1,5)
تكون أساسا للفضاء الصفي للمصفوفة A.

(٢). $\{(1,1,2,0), (4,1,5,1), (6,1,9,1), (1,2,3,1)\}$ (1,5)
تكون أساسا للفضاء العمودي للمصفوفة A.

السؤال الخامس (6 درجات)

(١). $\langle v_1, v_2 \rangle = 1$ (0,5)، $\|v_1\| = \sqrt{5}$ (0,5)، $\|v_2\| = \sqrt{2}$ (0,5)

$$\cos\theta = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\|\|v_2\|} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$ (0,5) (0,5)

(٢). $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} v_1$، (0,5)

$v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = 3(-3,1)$

إذًا $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-3,1)$ (2)

(٣). إذا كان $w = au_1 + bu_2$ فإن $\|w\|^2 = a^2 + b^2$. (1)