تمرين 1 :

ليكن (X, d) فضاءًا متريًا. أثبت ما يلي.

1. إذا كانت $A \subset X$ و U مجموعة جزئية مفتوحة من X، فإن $U \cap \overline{A} \subset \overline{U \cap A}$.
2. إذا كانت D كثيفة في X و U مجموعة جزئية مفتوحة من X، فإن $U \subset \overline{U \cap D}$.

تمرين 2 :

ليكن (X, d) فضاءًا متريًا و A و B مجموعتين جزئيتين من X.

1. أثبت أن: $\forall x \in X\ ;\ x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$.
2. أثبت أن: $\forall x \in X\ ;\ d(x, A) = d(x, \overline{A})$.
3. أثبت أن: $\overline{A} = \overline{B} \iff \forall x \in X,\ d(x, A) = d(x, B)$.

تمرين 3 :

ليكن (X,d) فضاءًا متريًا و A و B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من X.

1. أثبت أن الدالة $d(x,A) \longmapsto x$ متصلة في (X,d).
2. أثبت أن $C = \{x \in X\ ;\ d(x,A) = d(x,B)\}$ مجموعة مغلقة في X.
3. أثبت أن $D = \{x \in X\ ;\ d(x,A) < d(x,B)\}$ مجموعة جزئية مفتوحة في X.
4. أثبت أنه إذا كان A و B مجموعتين جزئيتين مغلقتين و منفصلتين من X، فإنه توجد مجموعتين جزئيتين مفتوحتين و منفصلتين U و V في X حيث $A \subset U$ و $B \subset V$.
5. نفترض أن A و B مجموعتين منفصلتين و مغلقتين في X. لتكن $f\colon (X,d) \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بما يلي: $f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$.
   1. أثبت أن الدالة f متصلة على X.
   2. أوجد إختصار الدالة f على A و على B.

تمرين 4 :

نقول أن متتالية $(x_n)_n$ في فضاء متري (X,d) كوشي، إذا كان $\lim\limits_{n,m\to+\infty} d(x_n,x_m)=0$، أو: $\forall\varepsilon>0$، يوجد $N\in\mathbb{N}$ بحيث $d(x_n,x_m)\leq\varepsilon$ لكل $n,m\geq N$.

أثبت أنه إذا كان (X,d) فضاءًا متريًا فإن

1. كل متتالية كوشي محدودة.
2. كل متتالية متقاربة هي كوشي.
3. إذا كان لمتتالية كوشي متتالية جزئية متقاربة، فإن المتتالية متقاربة.

تمرين 5 :

ليكن على $X =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ المترك $d_1(x,y) = |x-y|$ و المترك $d_2(x,y) = |\tan x - \tan y|$ لكل $x, y \in X$.

1. أثبت أن d_1 و d_2 يعرفان نفس التوبولوجي على X.
2. أثبت أن (X, d_2) كامل (كل متتالية كوشي متقاربة).
3. هل الفضاء المتري (X, d_1) كامل؟

حل التمرين 1:

1. ليكن $x \in U \cap \overline{A}$ و ليكن V مجموعة مفتوحة تحوي x. بما أن $U \cap V$ مجموعة مفتوحة و تحوي x، فإن $V \cap U \cap A \neq \emptyset$. و هذا يثبت أن $x \in \overline{U \cap A}$.
2. D كثيفة في X. باستعمال السؤال الأول مع $A = D$، نحصل على: $\overline{U \cap D} \supset U = U \cap \bar{D}$.

حل التمرين 2:

1. $x \in \overline{A}$ إلا و إذا وجدت متتالية $(x_n)_n \in A$ بحيث $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x.$ فإن $d(x, A) = 0$.
إذا كان $d(x, A) = 0$، فإن لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد $x_n \in A$ بحيث $d(x_n, x) \leq \frac{1}{n}.$ إذا كان U مفتوح بحيث $x \in U$، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N$، $x_n \in U$. فإن هذا يعني أن $x \in \overline{A}$.

2. بما أن $A \subset \overline{A}$، فإن $d(x, \overline{A}) \leq d(x, A)$.
ليكن $r > 0$، بحيث $d(x, \bar{A}) < r$. لكل $s > 0$ بحيث $d(x, \bar{A}) < s < r$، توجد $y \in \bar{A}$ بحيث $d(x, y) < s$. بما أن $y \in \bar{A}$، فإن $B_d(y, r - s) \cap A \neq \emptyset$.
ليكن $z \in B_d(y, r - s) \cap A$،
$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < r$. فإن $d(x, A) < r$. هذا لكل r بحيث $d(x, \bar{A}) < r$. إذاً $d(x, A) \leq d(x, \overline{A})$.

3. إذا كان $\overline{A} = \overline{B}$،

فإن $\forall x \in X$، $d(x, A) = d(x, \overline{A}) = d(x, \overline{A}) = d(x, B)$.

نفرض أن $\forall x \in X$، $d(x, A) = d(x, B)$. إذاً $\{x \in X : d(x, A) = d(x, \bar{A})\} = \bar{A} = \{x \in X : d(x, B) = d(x, \bar{B})\} = \bar{B}$.

حل التمرين 3:

1. ليكن $x, y \in X$. نعرف أن $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ لكل $z \in A$. إذاً
$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A) \iff d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$.
باستعمال التناظر نحصل على: $d(y,A) - d(x,A) \leq d(x,y)$. إذاً $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$. و هذا يثبت أن الدالة $x \longmapsto d(x,A)$ متصلة على X.

2. الدالة $x \longmapsto d(x,A) - d(x,B)$ متصلة،إذاً المجموعة $C = \{x \in X\,;\; d(x,A) = d(x,B)\} = \{x \in X\,;\; d(x,A) - d(x,B) = 0\}$ مغلقة في X.

3. الدالة $x \longmapsto d(x,A) - d(x,B)$، متصلة،إذاً المجموعة $D = \{x \in X\,;\; d(x,A) < d(x,B)\} = \{x \in X\,;\; d(x,A) - d(x,B) < 0\}$ مفتوحة في X.

4. بما أن A و B منفصلتين و مغلقتين، فإن $d(A,B)>0$.
المجموعتين الجزئيتين $U=\{x\in X\,;\ d(x,A)<d(x,B)+\frac{1}{2}d(A,B)\}$ و $V=\{x\in X\,;\ d(x,B)<d(x,A)+\frac{1}{2}d(A,B)\}$ مفتوحتين و منفصلتين. $A\subset U$ و $B\subset V$.

5. $f(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$.

   1. بما أن $d(x,A)$ و $d(x,B)$ متصلة، فإن الدالة f متصلة.
   2. $f(x)=0$ على A و $f(x)=1$ على B.

حل التمرين 4:

1. ليكن $\varepsilon = 1$، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N$، $d(x_n, x_N) \leq 1$. فإن المتتالية محدودة.
2. لتكن $(x_n)_n$ متتالية متقاربة و $x = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N$، $d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. فإن لكل $n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$.
3. لتكن $(x_n)_n$ متتالية كوشي بحيث يوجد متتالية جزئية متقاربة $(x_{n_k})_k$ حيث $x = \lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k}$. إذاً لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n, m \geq N$، $d(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ و يوجد N' بحيث لكل $k \geq N'$, $d(x_{n_k}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. و بالتالي إذا كان $n \geq max(N, N')$، فإن $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \leq \varepsilon$.

حل التمرين 5:

1. الفترات المفتوحة $X \supset (a,b)$ تشكل قاعدة للتبولوجي المعتاد في X. إذا $\tan x \in (\tan^{-1} a, \tan^{-1} b) \iff x \in (a,b)$. (هذا لأن الدالة $\tan$ تكافئ توبولوجي بين X و $\mathbb{R}$.
2. لتكن $(x_n)_n$ متتالية كوشي في (X,d_2)، و هذا متكافئ مع $0 \underset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} d_2(x_n,x_m)$. و هذا متكافئ كذلك مع: $\lim\limits_{n,m\to+\infty} |\tan x_n - \tan x_m| = 0$. و هذا يعني أن المتتالية $(\tan x_n)_n$ متتالية كوشي في $\mathbb{R}$. إذاً متقاربة.
3. المتتالية $(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})_n$ متتالية كوشي و لكن ليست متقاربة في X.