

Natural Exponential Function

الدالة الأسية الطبيعية

Math 111

Lecture 8

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

تعريف : تعرف الدالة اللوغاريتمية الطبيعية على النحو التالي:

$$\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

حيث أن الدالة $f(t) = \frac{1}{t} dt$ متصلة على أي فترة لا تحتوي على الصفر
و لذلك فهي قابلة للتكامل على الفترة من 1 إلى x .

تعريف :

تعرف الدالة الأسية الطبيعية على أنها دالة عكسية للدالة اللوغاريتمية ويرمز لها بالرمز \exp أو e ويمكن تعريفها على النحو التالي:

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$$

$$y = \exp x \Leftrightarrow \ln y = x$$

ملحوظات:

- مجال الدالة \exp هو \mathbb{R} ومداهما $(0, \infty)$.
- $\exp(x) > 1 \rightarrow x > 0$, $\exp(x) < 1 \rightarrow x < 0$

و

$$\exp(0) = 1.$$

- الدالة \exp تزايدية.
- بما أن \ln و \exp دالتان عكسيتان ، لذلك

$$\ln e^x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$e^{\ln x} = x, \quad \forall x \in (0, \infty).$$

خصائص الدالة الأسية الطبيعية:

مبرهنة:

لكل $a, b > 0$ و لكل $r \in \mathbb{Q}$

- $\exp(a) \exp(b) = \exp(a + b),$
- $\frac{\exp(a)}{\exp(b)} = \exp(a - b),$
- $(\exp(x))^r = \exp(xr),$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty,$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0.$

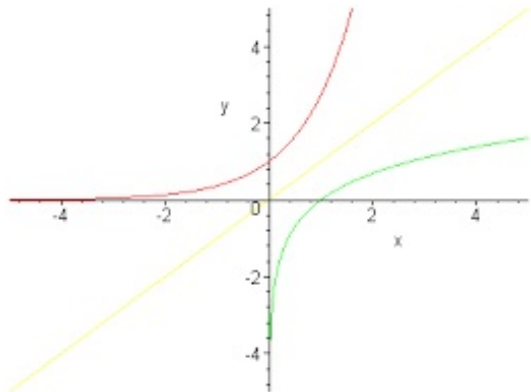


Figure: $\ln(x), \exp(x)$.

اشتقاق الدالة الأسية الطبيعية:
مبرهنة:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{d}{dx}(e^{f(x)}) = e^{f(x)} f'(x) \quad \forall x \in D(f').$$

Example

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

(1) $\exp(2x^3 + x^2)$,

(2) $\exp(x^2 \ln x)$.

(3) $\sin x \exp(\cos x) \exp(x)$.

تكامل الدالة الأسية الطبيعية:
مبرهنة:

- $\int e^x dx = e^x + c,$
- $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c, \quad \forall a \neq 0$

Example

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية :

$$(1) \int e^{15x} dx ,$$

$$(2) \int e^{(-x^3)} x^2 dx.$$

$$(3) \int \sqrt{e^x} dx.$$

$$(4) \int e^{(\tan x)} \sec^2 x dx.$$

$$(5) \int e^{(3x)} \sin(1 + e^{3x}) dx.$$

مبرهنة:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

راجع الكتاب ٧٣.

Exercise

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

(1) $\exp(3x^2)$,

(2) $e^{\sqrt{x}} + \sqrt{e^x}$.

(3) $xe^{\cot x}$.

Exercise

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1) \int (x + e^{5x}) dx ,$$

$$(2) \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx.$$

$$(3) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$(4) \int e^{(\cos x)} \sin x dx.$$

$$(5) \int \frac{\tan e^{-3x}}{e^{3x}} dx.$$

Thanks for listening.