جامعة الملك سعود قسم الرياضيات

اختبار 316 ريض الفصل الأول 1445

السؤال الأول

إثبت ان متتالية الدوال التالية

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ n+1, & 0 < x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

تتقارب نقطيا من الدالة الصفرية دون ان تتقارب من نفس الدالة بالنسبة للقياس التالي

$$||f|| = (\int_0^1 f(x)^2 dx)^{1/2}.$$

السؤال الثاني

حدد المعاملات $a,\ b,\ c$ **في الدالة**

$$a\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c\ \cos(\pi x)$$

للحصول علي أفضل تقريب في $L^2(\ 0,2\ )$ **للدالة** $f(x) = x$.

السؤال الثالث

1. **اثبت ان الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية**

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + \mu^2 y(x) = 0, \quad 1 < x < 2$$

يتمثل في

$$y(x) = A\cos(\mu\ \ln x) + B\sin(\mu\ \ln x)$$

2. **اوجد القيم والدوال الذاتية للمسالة الذاتية تحت الشروط الحدية**

$$y(1) = y(2) = 0$$

السؤال الرابع

a. اثبت ان

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} cos\,(nx)$$

حيث $-\pi < x \leq \pi$

b. استنتج من دالك قيم المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

السؤال الثالث

1) ثبت ان

$$\Gamma\left(\mathrm{n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{n!\,4^n}$$

2) تحقق من تقارب متسلسلة القوي التي تمثل الدالة لكل x

$$x^{-\mu}J_\mu(x) = 2^{-\mu}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\mathrm{n}+\mu+1)} (\frac{x}{2})^{2n}$$

3) اثبت ان

$$xJ'_\mu(x) = \mu J_\mu(x) - xJ_{\mu+1}(x)$$

4) استنتج ان

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ (\frac{sin(x)}{x} - cosx)$$