


<p>Kingdom of Saudi Arabia Ministry of Higher Education KING SAUD UNIVERSITY Department of Mathematics College of Science</p>		<p>المملكة العربية السعودية وزارة التعليم العالي جامعة الملك سعود قسم الرياضيات كلية العلوم</p>
--	---	--

الاختبار النهائي للفصل الثاني (1441-1442) للمقرر 316 رياض

السؤال الأول: لتكن لدينا الدالة $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$ حيث أن $f(x+2\pi) = f(x)$

(أ) أوجد متسلسلة فوريير للدالة $f(x)$ واستنتج مجموع المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

(ب) بين أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

(ج) باستعمال مطابقة بارسفال أثبت أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

السؤال الثاني لتكن لدينا المسألة الحدية: $\begin{cases} u^{(4)} - \lambda u = 0, \\ u(\pi) = 0, u'(0) = 0, u''(\pi) = 0, u'''(0) = 0 \end{cases}$

(أ) أوجد القيم الذاتية و الدوال الذاتية المرتبطة بها لهذه المسألة في الحالتين ($\lambda = 0$, $\lambda > 0$)

(ب) أثبت أن الدوال الذاتية متعامدة على الفترة $(0, \pi)$.

تنبيه: ضع $(\lambda = v^4)$

السؤال الثالث: لتكن لدينا المسألة الحدية: $\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \\ u'(0) = \alpha u(0), u'(L) = \beta u(L), \alpha, \beta \in \mathbb{R}^* \end{cases}$

(أ) أوجد العلاقة التي تعطي القيم الذاتية و الدوال الذاتية المرتبطة بها لهذه المسألة عندما يكون ($\lambda > 0$) وهل للقيمة الذاتية $\lambda = 0$ دالة ذاتية.

(ب) أوجد $\|u\|^2$ عندما $\beta = -\alpha$

السؤال الرابع: (أ) إذا علمت أن $J'_0 = -J_1$ وأن $\frac{d}{dx}(xJ_1) = xJ_0$ فاثبت أن

$$\int_0^x s^n J_0(s) ds = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1} J_0(x) - (n-1)^2 \int_0^x s^{n-2} J_0(s) ds$$

(ب) إذا كان $\alpha > 0, b > 0, v \geq 0$ فاثبت أن

$$\int_0^b x (J_v(\alpha x))^2 dx = \frac{b^2}{2} (J'_v(\alpha b))^2 + \frac{b^2 \alpha^2 - v^2}{2\alpha^2} (J_v(\alpha b))^2$$

(ج) أوجد تكامل فوريير للدالة $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ واستنتج قيمة التكامل: $\int_0^{\infty} \frac{\cos(\pi x) + x \sin(\pi x)}{1+x^2} dx$