جامعة الملك سعود

كلية العلوم قسم الرياضيات الإختبار النهائي

الفصل الأول 1437 – 1438 هـ 244 ريض الزمن ثلاث ساعات

الإختبار يحتوي على صفحتين

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

السؤال الأول

أ) لتكن كل من $\mathbf{A, B, C}$ مصفوفة مربعة من الدرجة 4 و تحقق

$$|A| = 2, \qquad |B| = -3, \qquad |C| = 5$$

احسب المحدد التالي $|2A^{-5}B^{-3}C^{-1}(B^T)^5|$

ب) لتكن مصفوفتين مربعتين من الدرجة n غير صفريتين E و P حيث $\mathbf{E^2 = 0}$ و $PE = EP$.
احسب $\mathbf{(I - PE)(I + PE)}$
ماذا تستنتج؟

ج) اعط مصفوفة غير صفرية E من الدرجة 2 حيث $E^2 = 0$.

السؤال الثاني

ليكن النظام الخطي

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ -x + 3y + az = 2 \\ 2x + y + z = b \end{cases}$$

عين قيم كل من $\mathbf{a, b}$ التي من أجلها يكون للنظام

(١). ليس له حل

(٢). حل وحيد

السؤال الثالث

أ) أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Scanned by CamScanner

ب) لتكن $B = A\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}A^{-1}$ حيث A هي المصفوفة في الفقرة (أ)
أوجد مصفوفة C حيث $C^3 = B$.

السؤال الرابع
عين أساسا لصورة و أساسا لنواة التحويل الخطي $\mathbf{T}:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة

$$\mathbf{T(x,y,z,t) = (x - y + z, 2x - z - t, y + z + 2t).}$$

السؤال الخامس
ليكن $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التحويل الخطي والذي مصفوفته بالنسبة للأساس المعتاد S للفضاء $\mathbb{R}^3$ هي

$$[\mathbf{T}]_S = \begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

أوجد مصفوفة التحويل الخطي $[\mathbf{T}]_B$ بالنسبة للأساس B التالي

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{u_1} = (1,1,1),\ \mathbf{u_2} = (2,3,3),\ \mathbf{u_3} = (1,3,4)\}.$$

السؤال السادس

(١). أثبت أن (-1) و 2 هي قيم مميزة للمصفوفة

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}8 & -15 & 9\\ 9 & -16 & 9\\ 9 & -15 & 8\end{pmatrix}.$$

(٢). أوجد أساسا للفضاءات المميزة $\mathbf{E_{-1}} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3;\ \mathbf{AX} = -\mathbf{X}\}$ و $\mathbf{E_2} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3;\ \mathbf{AX} = 2\mathbf{X}\}$

(٣). أ) أوجد مصفوفة P لها معكوس ومصفوفة D قطرية حيث $\mathbf{D = P^{-1}AP}$.
ب) أوجد المصفوفة $\mathbf{A^9}$.

السؤال السابع
إذا كان الضرب الداخلي على الفضاء $\mathbb{R}^2$ معرفا بالقاعدة

$$\langle (x,y),(x',y')\rangle = 2xx' + yy'$$

استخدم قاعدة جرام شميت لتحويل الأساس

$$\{u_1 = (1,-1),\ u_2 = (2,1)\}$$

إلى أساس عياري و متعامد.

Scanned by CamScanner

الإختبار النهائي ٤٤٤ رياض (الجبر الخطي)

السؤال الأول: (6 درجات)

أ)

(3) $|2A^{-5}B^{-3}C^{-1}(B^T)^5| = 2^4 \cdot 2^{-5}(-3)^{-3}5^{-1}(-3)^5 = \frac{9}{10}$.

ب)

(1,5) $(I-PE)(I+PE) = I$.

(0,5) إذن $I-PE$ لها معكوس، ومعكوسها $I+PE$.

ج)

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

السؤال الثاني: (4 درجات)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & a & 2 \\ 2 & 1 & 1 & b \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & a+3 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & b+2 \end{array}\right]$$

(2)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & a+3 & 1 \\ 0 & 0 & -4-a & \frac{b-3}{5} \end{array}\right]$$

(1) أ) إذا كان $a=-4$ و $b \neq 3$ فليس له حل.

(1) ب) إذا كان $a \neq -4$ النظام له حل وحيد.

السؤال الثالث: (5 درجات)

أ)

(3) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

ب)

(2) $C = A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Scanned by CamScanner

السؤال الرابع: (6 درجات)

مصفوفة التحويل الخطي هي:

② $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

المعتزلة

والصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة هي

① $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

② $\text{Ker}T = \{ t(0,1,1,-1), t \in \mathbb{R} \}$. إذا

① $\dim \text{Ker}T = 1 \Rightarrow \dim \text{Im}T = 3 \Rightarrow \text{Im}T = \mathbb{R}^3$.

السؤال الخامس: (6 درجات)

② $T(u_1) = (1,1,1) = u_1$.

② $T(u_2) = (4,6,6) = 2u_2$.

② $T(u_3) = (3,9,12) = 3u_3$.

② $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

السؤال السادس: (10 درجات)

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -15 & 9 \\ 9 & -16-\lambda & 9 \\ 9 & -15 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1+\lambda \\ 9 & -15 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(2-\lambda)\cdot(1$$

②

$AX = -X \Leftrightarrow 3x - 5y + 3z = 0$ (2

③ $E_{-1} = \langle (1,0,-1), (5,3,0) \rangle$.

Scanned by CamScanner

$AX = 2X \Leftrightarrow x = y = z$.

(2) $E_2 = <(1,1,1)>$.

(3)

(1) $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; (1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) $A^9 = P D^9 P^{-1}$ $\Leftarrow$ $A = PDP^{-1}$

السؤال السابع (4 درجات)

(1) $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} u_1$.

(1) $< v_1, u_2 > = \frac{1}{\sqrt{3}} (4 - 1) = \sqrt{3}$.

(1) $\tilde{v}_2 = (2,1) - (1,-1) = (1,2)$

(1) $v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1,2)$.

Scanned by CamScanner