جامعـــــة الملك سعـــــود　　كليـــة العلـــــوم　　قســـم الريـــاضيـــــــات
الفصل الأول 1431–1432 هــ / 385–ريض / الاختبار النهائي / الزمن: 3ساعات

الجزء الأوّل (40 درجة): (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة عن بعضها)

1) ليكن a و b عددان مركبان بحيث $\bar{a}b \neq 1$. بيّن أن $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$ إذا وفقط إذا كان إما $|a|=1$ أو $|b|=1$.

2) أوجد حلول المعادلة : $z^4 = -z^{-1}$.

3) أوجد القيم التالية : i^{2011} , $Arg\left(-1-i\sqrt{3}\right)$, $(1+i)^{1+i}$ و $\sqrt{i-1}$.

4) أوجد فرع للدالة $\log(z+3)$ بحيث تكون تحليلية عند $z=-4$ و تأخذ القيمة $5\pi i$ عندها. ثم وضح بالرسم قاطع الفرع على المستوى المركب.

5) لتكن $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ دالة كلية تحقق الخاصية التالية: يوجد $N\in\mathbb{N}$, $A,B\in\mathbb{R}$ بحيث

$$\forall r>0,\quad M(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|\le Ar^N+B\ .$$

أثبت أن f هي كثيرة حدود من درجة $\le N$.

6) لتكن $f:D(0,1)\to\mathbb{C}$ تحليلية على القرص الوحدة المفتوح $D(0,1)$ بحيث $f(0)=0$ و لكل $z\in D(0,1)$, $|f(z)|<1$.

أ) أثبت أن : $|f(z)|\le|z|$ لكل $z\in D(0,1)$, (<u>إرشاد:</u> ادرس $\dfrac{f(z)}{z}$).

ب) نفترض أنه يوجد $z_0\in D(0,1)$ بحيث $|f(z_0)|=|z_0|$, أثبت أنه يوجد ثابت حقيقي $\theta_0\in\mathbb{R}$ بحيث $f(z)=e^{i\theta_0}z$ لكل $z\in D(0,1)$.

7) أوجد متسلسلة لورانت للدالة $f(z)=\dfrac{z}{(2-z)(z-1)}$ على الطوق $0<|z-2|<1$.

8) إذا كان $z=a$ قطب بسيط للدالة $f(z)$ وكانت $g(z)$ تحليلية في جوار النقطة a, فبيّن أن :

$$\operatorname{Res}(fg,a)=g(a)\operatorname{Res}(f,a).$$

9) باستعمال طريقة الرواسب, بيّن أن : أ) لكل $a>1$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

ب) لكل $a>0,\ b>0$, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-ab}$.

الجزء الثاني (10 درجات):

1) على ماذا ينصّ مبدأ القيمة العظمى للمقياس ؟

2) بيّن أنه إذا كان $z=x+iy$, فإن $|\sin z|^2=\sin^2x+\sinh^2y$.

3) استعمل (1) و (2) لإيجاد القيمة العظمى لمقياس الدالة $f(z)=\sin z$, على المنطقة المستطيلة $R=\left\{z=x+iy\in\mathbb{C},\quad 0\le x\le\pi,\quad 0\le y\le 1\right\}$.

إصلاح الاختبار النهائي ٣٨٥ ريض (التحليل المركب ١)
للفصل الأول ١٤٣١ / ١٤٣٢هـ

الجزء الأول:

(١) نأخذ $a,b\in\mathbb{C}$ بحيث $\bar a b\neq 1$. $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar a b}\right|=1 \iff |a-b|=|1-\bar a b|$

4

$\iff |a-b|^2=|1-\bar a b|^2 \iff (a-b)(\bar a-\bar b)=(1-\bar a b)(1-a\bar b)$

$\iff |a|^2-a\bar b-b\bar a+|b|^2=1-a\bar b-\bar a b+|a|^2|b|^2$

$\iff (1-|a|^2)(1-|b|^2)=0$

$\iff |a|=1$ أو $|b|=1$.

طريقة ثانية:

"$\Rightarrow$" نفترض أن $|a|=1$،

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar a b}\right|^2=\frac{(a-b)(\bar a-\bar b)}{(1-\bar a b)(1-a\bar b)}=\frac{|a|^2-a\bar b-b\bar a+|b|^2}{1-a\bar b-\bar a b+|a|^2|b|^2}=\frac{1-a\bar b-b\bar a+|b|^2}{1-a\bar b-\bar a b+|b|^2}=1$$

إذن $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar a b}\right|=1$

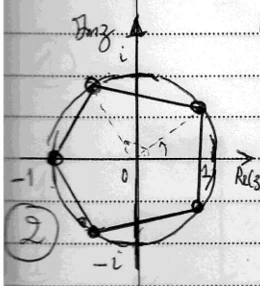
"$\Leftarrow$" نفترض أن $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar a b}\right|=1$ وأن $|a|\neq 1$ فلنثبت أن $|b|=1$ (باستخدام طريقة البرهان السابق) $|a-b|^2=|1-\bar a b|^2 \Rightarrow (1-|a|^2)(1-|b|^2)=0 \Rightarrow 1-|b|^2=0 \Rightarrow |b|=1$.

(٢) $z\neq 0$ ، $z^4=-z^{-1} \Rightarrow z^5=-1$.

2

نضع $z=re^{i\theta}$ فإن $z^5=r^5e^{i5\theta}=-1=e^{i(\pi+2k\pi)}$.

هذا يؤدي $\begin{cases} r^5=1\\ 5\theta=\pi+2k\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=1\\ \theta_k=\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{2k\pi}{5}\end{cases}$ ، $0\le k\le 4$



$z_0=e^{i\pi/5}$; $z_1=e^{3i\pi/5}$; $z_2=-1$; $z_3=\bar z_1$; $z_4=\bar z_0$

2

$S_{\mathbb{C}}=\{z_k=e^{i\theta_k},\ 0\le k\le 4\}$

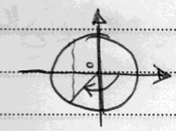
(٣) بما أن $i^2=-1$ فإن $i^4=1$

$2011=4\times 502+3$ إذن $i^{2011}=i^{4\times 502+3}$

1

$i^{2011}=(i^4)^{502}\, i^3=i^3=-i$

$z = -1 - i\sqrt{3} = r e^{i\theta}$ حيث $r = |z|$ و $-\pi < \theta = \text{Arg}\, z < \pi$



$|z|^2 = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 \Rightarrow |z| = 2$

إذن $\begin{cases} \cos\theta = -1/2 \\ \sin\theta = -\sqrt{3}/2 \end{cases}$

هذا يؤدي إلى أن $\theta = -2\pi/3$

1 يعني أن $\text{Arg}(-1 - i\sqrt{3}) = -2\pi/3$.

$$(1+i)^{1+i} = e^{(1+i)\log(1+i)}$$

$$\text{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\,\text{Arg}(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln(2) + i\frac{\pi}{4}$$

1

$$(1+i)^{1+i} = e^{(1+i)(\frac{1}{2}\ln 2 + i\pi/4)} = e^{(\frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}\, e^{-\pi/4} \cdot e^{i(\pi/4 + \ln\sqrt{2})}.$$

$$\sqrt{i-1} = (i-1)^{1/2} = e^{1/2\,\text{Log}(i-1)}$$

$$\text{Log}(i-1) = \ln|i-1| + i\,\text{Arg}(i-1)$$

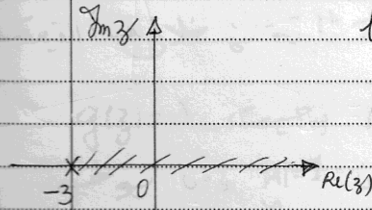
$$\text{Log}(i-1) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Log}(i-1) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{3\pi}{4}$$

1 إذن $\sqrt{i-1} = e^{1/4 \ln 2 + i\frac{3\pi}{8}} = 2^{1/4} \cdot e^{i3\pi/8}$

(ع)

1 $\log(z+3) = \ln|z+3| + i\arg(z+3)$



1 $\log(-4+3) = \log(-1) = i\arg(-1) = 5\pi i$

1 $\arg(-1) = \text{Arg}(-1) + 2k\pi = \pi + 2k\pi$

1 إذن $k = 2$.

الدالة $z \longrightarrow \log(z+3)$ تحليلية على $\mathbb{C}\setminus[-3,\infty)$.

(0) بما أن f تحليلية على $\mathbb{C}$ فإن $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

نعلم أن $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ وباستخدام صيغة كوشي التكاملية

فإن: $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$

$$|f^{(n)}(0)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}\, r i e^{i\theta} d\theta\right|$$

$$\le \frac{n!}{r^n} M(r)$$

هذا يؤدي إلى أن: $|a_n| \le \frac{M(r)}{r^n} \le \frac{Ar^N+B}{r^n}$

إذا كان $n \ge N+1$: $\frac{Ar^N+B}{r^n} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

إذن $a_n = 0$ لكل $n \ge N+1$ ، يعني $f(z)=\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$

(f هي كثيرة حدود من درجة $\le N$).

(7) أ) نضع $g(z)=\frac{f(z)}{z}$ ، بما أن $f(0)=0$ فإن

g تحليلية على $D(0,1)$. نستخدم الآن مبدأ القيمة العظمى للدالة g

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \le \frac{M(r)}{r} \xrightarrow[r\to 1]{} 1$$

هذا يؤدي إلى أن $|f(z)| \le |z|$ لكل $z\in D(0,1)$

ب) بما أن $|g(z)| \le 1$ و $\left|g(z_0)=\frac{f(z_0)}{z_0}\right| = 1$, $z_0 \ne 0$

فإن $g(z)=\frac{f(z)}{z}$ هي دالة ثابتة من خلال مبدأ القيمة العظمى

إذن يوجد $\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda|=1$ بحيث $g(z)=\lambda$

يعني $f(z)=\lambda z$ ، بما أن $|\lambda|=1$ إذن يوجد $\theta_0\in\mathbb{R}$ بحيث $\lambda=e^{i\theta_0}$ ، يعني $f(z)=e^{i\theta_0}\cdot z$

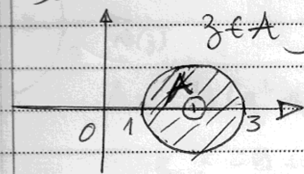
لكل $z\in D(0,1)$.

لا يكتب في هذا الهامش

(7) الدالة $f(z)=\dfrac{z}{(2-z)(z-1)}$ تحليلية على الطوق A:

(1) إذن f تكتب على شكل متسلسلة لورانت $0<|z-2|<1$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-2)^n \quad \text{لكل } z\in A$$



(1)
$$\frac{z}{(2-z)(z-1)} = \frac{2}{2-z}+\frac{1}{z-1}$$

(2)
$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2+1}=\frac{1}{1-(2-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(2-z)^n$$

إذن لكل z بحيث $0<|z-2|<1$,

(1)
$$\frac{z}{(2-z)(z-1)} = \frac{-2}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$

(8) بما أن $z=a$ هو قطب بسيط لـ f فإن:

(1)
$$Res(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

وبما أن g تحليلية عند a فإن لدينا $\lim_{z\to a} g(z)=g(a)$

ولدينا أيضا أن $z=a$ هو قطب بسيط لـ $f.g$ إذن

(1)
$$Res(f.g;a)=\lim_{z\to a}(z-a)(f.g)(z)$$

$$=\lim_{z\to a}(z-a)\,f(z)\,g(z)=g(a)\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

(1)
$$Res(f.g;a)=g(a)\,Res(f,a)$$

(9)

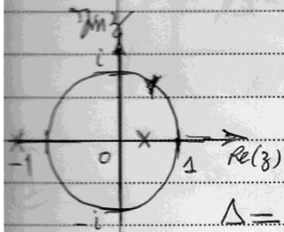
أ) ليكن $a>1$، نضع $z=e^{i\theta}$ ، $0\le\theta\le 2\pi$

(1)
$$d\theta=\frac{dz}{iz} \Leftarrow dz=i\,e^{i\theta}d\theta=iz\,d\theta$$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z+1/z}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{a+\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)}\frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = -2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1}$$



الآن نأخذ $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2az+1}$

$\Delta = 4(a^2-1) > 0 \quad ; \quad z^2+2az+1=0$

$z_2 = -a+\sqrt{a^2-1} \quad ; \quad z_1 = -a-\sqrt{a^2-1}$

بما أن $|z_1 z_2|=1$ و $|z_1|>1$ فإن $|z_2|<1$.

f تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{z_1, z_2\}$ ،

3

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \, Res(f ; z_2)$$

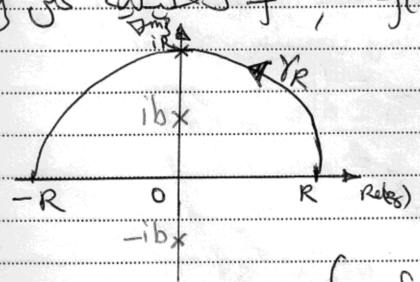
$$Res(f ; z_2) = \lim_{z\to z_2} \frac{(z-z_2)\times 1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{z_2-z_1} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$$

فنستنتج أن: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = 2\pi i \times (-\cancel{2}i) \times \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

ب) نأخذ $a>0$ و $b>0$ ؛

نضع $f(z) = \dfrac{z}{z^2+b^2} e^{iaz}$ ، f تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{\pm ib\}$ 1

1



$\Gamma_R = [-R, R] \cup \gamma_R$

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \; Res(f, ib)$$

$z=ib$ هو قطب بسيط للدالة f

1 $$Res(f, ib) = \lim_{z\to ib} (z-ib) \frac{z\, e^{iaz}}{(z-ib)(z+ib)} = \frac{1}{2} e^{-ab}$$

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x\, e^{iax}}{x^2+b^2}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{Re^{i\theta} e^{iaRe^{i\theta}}}{R^2 e^{2i\theta}+b^2}\, iRe^{i\theta} d\theta$$

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{Re^{i\theta}\, e^{ia(R\cos\theta + iR\sin\theta)}}{R^2 e^{2i\theta} + b^2}\, iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{2R^2}{R^2 - b^2} \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta} d\theta$$

1 بما أن لكل $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ فإن

$$\lim_{R\to\infty} \frac{2R^2}{R^2-b^2} \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}\, d\theta = 0$$

فنستنتج أن

$$\cancel{i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+b^2}\, dx = \pi \cancel{i}\, e^{-ab}$$

1 الدالة $g(x) = \dfrac{x \sin ax}{x^2+b^2}$ هي دالة زوجية فإن :

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+b^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ab}$$

الجزء الثاني :

(1) مبدأ القيمة العظمى للمقياس :

3 إذا كانت f تحليلية على نطاق محدود D و f متصلة على $\bar{D}$ فإن ~~$|f|$~~ القيمة العظمى للمقياس $|f|$ ينتمي على حافة D , bD . وإذا وجد نقطة تقع داخل D بحيث تكون القيمة العظمى للمقياس عندها فإن f ثابتة.

(c) نأخذ $z = x+iy$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix}$, $e^{-iz} = e^{-y-ix}$ فإن

$$|\sin z|^2 = \left(\frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} \right) \left(\frac{e^{-y-ix} - e^{y+ix}}{-2i} \right)$$

$$|\sin z|^2 = \frac{1}{4}\left[e^{-2y} - e^{2ix} - e^{-2ix} + e^{2y} \right]$$

1
$$|\sin z|^2 = \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{4} - \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{4}$$

1
$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = -\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{4} + \frac{1}{2}$$

لا يكتب في هذا الهامش

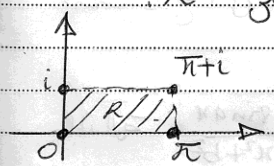
$$\sinh^2 y = \left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[e^{2y}+e^{-2y}-2\right]$$

$$\sinh^2 y = \frac{e^{2y}+e^{-2y}}{4} - \frac{1}{2}$$

إذن $\sin^2 x + \sinh^2 y = \dfrac{e^{2y}+e^{-2y}}{4} - \dfrac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{4}$ (1)

يعني $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

٣) الدالة $f(z)=\sin z$ تحليلية على R.



إذن القيمة العظمى لـ $|f(z)|$ موجودة على حافة R المكونة من 4 أضلاع (1)

بما أن $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$ فإن،

— على الفترة $[0,\pi]$ ، $|\sin z|^2 = \sin^2 x$ (0,5)

القيمة العظمى تكون عندما $x=\frac{\pi}{2}$ و $y=0$

وهي 1

— على الضلع الذي يربط بين π و $\pi+i$ (0,5)

$$|\sin z|^2 = \sin^2\pi + \sinh^2 y = \sinh^2 y \le \frac{e^2-1}{2e} < 1$$

لأن $0 \le y \le 1$

— على الضلع الذي يربط بين i و $i+\pi$ (0,5)

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 1 \le 1 + \sinh^2 1$$

عند $z = \frac{\pi}{2} + i$

— على الضلع الذي يربط بين 0 و i ، $(x=0,\ 0\le y\le 1)$ (0,5)

$$|\sin z|^2 = \sinh^2 y \le \sinh^2 1$$

النتيجة: القيمة العظمى لـ $|\sin z|$ هي $\sqrt{1+\sinh^2 1}$ (1)

وتكون عند النقطة $z = \frac{\pi}{2} + i$.