جامعـــــة الملك سعـــــود كليـــة العلـــــوم قســــم الريــــاضيـــــــــات

الفصل الأول 1432–1433 هـــ / 385–ريض / الاختبار النهائي / الزمن: 3 ساعات

الجزء الأوّل (28 درجة) (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة عن بعضها)

1) أوجد حلول المعادلة التالية : $z^4 - 2\sqrt{3}\, z^2 + 4 = 0$.

2) باستخدام صيغة دوموافر, بيّن أن : لكل $0 < \theta < 2\pi$ لدينا:

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

3) بيّن أن : $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$ ثم استنتج قيمة $\tan^{-1}(2i)$.

4) أوجد متسلسلة لورانت للدالة $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ على الطوق $1 < |z+1| < 2$.

5) أوجد القيمة الصغرى للدالة $|f(z)| = \left|\frac{e^z}{z}\right|$ على الطوق $\frac{1}{2} \le |z| \le 1$.

6) لتكن $f(z)$ دالة تحليلية عند $z = 0$ بحيث $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2 - 3n + 1}{n^2}$ لكل $n \in \mathbb{N}^*$, أوجد $f(z)$.

7) لتكن $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ دالة كلية و لنفترض أنه يوجد عددين حقيقيين $A \ge 0, B \ge 0$ بحيث لكل $z \in \mathbb{C}$ لدينا $|f(z)| \le A\,(1+|z|)^B$. برهن أن f هي كثيرة حدود من درجة $\le [B]$.

الجزء الثاني (8 درجات):

لتكن $u(x,y) = \sin x \cosh y$.

1) بيّن أن : $u(x,y)$ توافقية على $\mathbb{R}^2$, ثم أوجد مرافقة توافقية $v(x,y)$ لها.

2) استنتج وجود دالة كلية $f(z)$ جزؤها الحقيقي $\Re e\left(f(x+iy)\right) = u(x,y)$. أوجد عبارة لـ $f(z)$ بدلالة z , ثم اكتب $f(z)$ على الصيغة القطبية إذا أمكن.

الجزء الثالث (14 درجة): (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة عن بعضها)

1) أثبت أن : $\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (تكاملات فرسنيل *Fresnel's Integrals*)

وذلك بتطبيق نظرية كوشي على الدالة $f(z) = e^{-z^2}$ على طول حدود القطاع $0 \le |z| \le R$ و $0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$.

2) احسب التكاملات التالية بطريقة الرواسب , معلّلا كل خطوات الحل:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta} \quad (-1 < a < 1) \quad , \quad J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 4x + 5}dx .$$

و الله ولي التوفيـــــــق

إصلاح الاختبار النهائي للفصل الأول ١٤٣٢-١٤٣٣
٣٨٥ ريض (التحليل المركب)

الجزء الأول (28 درجة)

① $z^4 - 2\sqrt{3}\, z^2 + 4 = 0$. نضع $U = z^2$

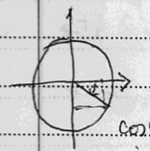
$U^2 - 2\sqrt{3}\, U + 4 = 0$ (معادلة من الدرجة الثانية)

المميز: $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4\times 1\times 4$

$= 12 - 16 = -4 = (2i)^2$

$$U_1 = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i$$

$$U_2 = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$$



$\cos\theta = \sqrt{3}/2$
$\sin\theta = -1/2$

$z = re^{i\theta}$ فإن $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$; $z^2 = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\pi/6}$

$$r^2 e^{2i\theta} = 2e^{-i\pi/6}$$

$$\begin{cases} r^2 = 2 \\ 2\theta = -\frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \pm\sqrt{2} \\ \theta = -\pi/12 \end{cases}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/12} \;;\; z_2 = -\sqrt{2}\, e^{-i\pi/12} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

$$z^2 = \sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6} = r^2 e^{i2\theta}$$

$$r = \pm\sqrt{2} \;,\; \theta = \frac{\pi}{12}$$

$$z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/12} \;;\; z_4 = -\sqrt{2}\, e^{i\pi/12} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{11\pi}{12}}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ z_1 = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/12} \;;\; z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}} \;;\; z_3 = \bar{z}_1 \;;\; z_4 = \bar{z}_2 \right\}$$

② نأخذ $0 < \theta < 2\pi$;

$$1 + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta$$

$$\cos k\theta = \mathrm{Re}\,(e^{ik\theta})$$

$$1 + \cos\theta + \cdots + \cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right)$$

$e^{i\theta} \neq 1$; $1 + \cos\theta + \cdots + \cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k\right] = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right)$

$$\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i(\frac{n+1}{2})\theta}\left(e^{-i(\frac{n+1}{2})\theta} - e^{i(\frac{n+1}{2})\theta}\right)}{e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\right)} = e^{i\frac{n\theta}{2}}\left[\frac{-2i\sin(\frac{n+1}{2})\theta}{-2i\sin\frac{\theta}{2}}\right]$$

$$Re\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

1

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$$

$$\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\theta - \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

إذن

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]+\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

1

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall\ 0<\theta<2\pi$$

3

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad ; \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\tan z = \frac{1}{i}\ \frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$$

آن نضع $w = \tan^{-1} z$. فإن $z = \tan w$

1

$$z = \frac{1}{i}\ \frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1}$$

$$iz\left(e^{2iw}+1\right) = e^{2iw}-1$$

$$iz\,e^{2iw} + iz = e^{2iw}-1$$

$$e^{2iw}(iz-1) = -iz-1$$

1

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$2iw = \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = \log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$$

فنستنتج أن

$$w = \tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$$

1

$$\tan^{-1}(2i) = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{i-2i}{i+2i}\right) = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{-i}{3i}\right) \ *$$

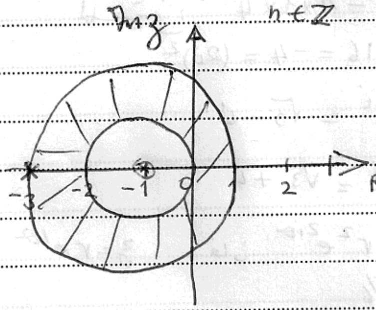
$$k\in\mathbb{Z}, \quad \tan^{-1}(2i) = \frac{-i}{2}\log\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{-i}{2}\left(-\ln 3 + i(2k+1)\pi\right)$$

$$\log\left(-\frac{1}{3}\right) = \ln\left|-\frac{1}{3}\right| + (2k+1)\pi i = -\ln 3 + i(2k+1)\pi$$

$$\tan^{-1}(2i) = \left(\frac{2k+1}{2}\right)\pi + i\,\frac{\ln 3}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$ ①

④ الدالة $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{-1,-3\}$

بما أن $\{-1,-3\}$ لا تنتمي للطوق $1<|z+1|<2$ فإن
f تحليلية على الطوق $1<|z+1|<2$ ، إذن f لديها ①
متسلسلة لورانت يعني $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z+1)^n$



ولنبحث عن a_n :

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+3}$$

حيث $A = \lim\limits_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim\limits_{z\to -1}\dfrac{1}{z+3} = +\dfrac{1}{2}$

$B = \lim\limits_{z\to -3}(z+3)f(z) = \lim\limits_{z\to -3}\dfrac{1}{z+1} = -\dfrac{1}{2}$

إذن $f(z) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{z+1} - \dfrac{1}{z+3}\right]$ لأن $\begin{matrix} z\neq -1 \\ z\neq -3\end{matrix}$ ①

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{2+(z+1)} = \frac{1}{2\left(1+\frac{z+1}{2}\right)}$$

بما أن $|z+1|<2$ فإن $\left|\dfrac{z+1}{2}\right|<1$ ، إذن

$$\frac{1}{1+\left(\frac{z+1}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\left(\frac{z+1}{2}\right)\right]^n$$ ①

$$f(z) = \frac{1/2}{z+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z+1)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(z+1)^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z+1)^n$$ لأن $1<|z+1|<2$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} & ,\ n\geq 0 \\ 1/2 & ;\ n=-1 \\ 0 & ;\ n<-1 \end{cases}$$ ①

لا يكتب في هنا الهامش

(5) نأخذ الدالة $g(z) = \frac{z}{e^z}$, g هي دالة تحليلية

على الطوق المغلق $\frac{1}{2} \le |z| \le 1$ ومتصلة وغير صفرية

فإن $|g(z)|$ تأخذ قيمتها العظمى على حدود الطوق.

$$\max_{\frac{1}{2} \le |z| \le 1} |g(z)| = \max_{\substack{|z|=1 \\ |z|=1/2}} |g(z)| = \min_{1/2 \le |z| \le 1} \left|\frac{1}{g(z)}\right|$$ (1)

$$\max_{1/2 \le |z| \le 1} \left|\frac{z}{e^z}\right| = \max_{\substack{|z|=1 \\ |z|=1/2}} \left|\frac{z}{e^z}\right| = \min_{1/2 \le |z| \le 1} \left|\frac{e^z}{z}\right| = \min_{1/2 \le |z| \le 1} |f(z)|$$

* على الدائرة $|z| = 1/2$. $\left(z = 1/2\, e^{i\theta} = \frac{1}{2}[\cos\theta + i\sin\theta]\right)$

$\cos\theta = -1$, $\theta = \pi$; $$|g(z)| = \left|\frac{z}{e^z}\right| = \frac{1/2}{e^{Re z}} = \frac{1}{2\, e^{\frac{1}{2}\cos\theta}}$$ (1)

exp $\nearrow$ تزايدية لأن ; $$|g(z)| \le \frac{1}{2\, e^{-1/2}} = \frac{\sqrt{e}}{2} = |g(-1/2)|$$

* على دائرة الوحدة $|z| = 1$, $\left(z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\right)$ $\theta \in \mathbb{R}$

$$|g(z)| = \left|\frac{z}{e^z}\right| = \frac{1}{e^{\cos\theta}} \le e = |g(-1)|$$ (1)

إذن

$$\max_{\frac{1}{2} \le |z| \le 1} \left|\frac{z}{e^z}\right| = \max\left(\frac{\sqrt{e}}{2}, e\right) = e = |g(-1)|$$

فنستنتج أن $$\min_{1/2 \le |z| \le 1} |f(z)| = \min_{1/2 \le |z| \le 1} \left|\frac{e^z}{z}\right| = \frac{1}{e} = |f(-1)|$$ (1)

يعني لكل $\frac{1}{2} \le |z| \le 1$, $$\frac{1}{e} \le \left|\frac{e^z}{z}\right|$$

(6) f تحليلية عند $z=0$ يعني أن f تحليلية على جوار للـ 0

أي على قرص D مفتوح $|z| < r$.

المتتالية $\{\frac{1}{n}\}$ تتقارب إلى $z=0$ عبر المستقيم الحقيقي (1)

إذا يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n > N$ $z_n = \frac{1}{n} \in D(0, r)$

(1) لنعتبر الدالة $F(z) = f(z) - (1 - 3z + z^2)$ هي دالة تحليلية عند $z=0$ وكل D

لدينا $F(v_n) = f(v_n) - (1 - 3v_n + v_n^2)$

$= \frac{n^2 - 3n + 1}{n^2} - (1 - \frac{3}{n} + 1/n^2) = 0$ لكل $n > N$

(2) باستخدام نظرية الامتداد التحليلي $F(z) \equiv 0$ لكل $z \in D$

إذن $f(z) = 1 - 3z + z^2$.

(7) نضع $[B]$ الجزء الصحيح الأعلى للعدد B و $n = [B] + 1 > B$.

(1) لدينا: $\sup_{C(z,r)} |f(z)| \leq A(1 + |z| + r)^B$ لكل $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$

باستخدام متباينة كوشي:

(1) $|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! A(1 + |z| + r)^B}{r^n}$ لكل $z \in \mathbb{C}$, $\forall r > 0$

عندما $r \longrightarrow \infty$ (f كلية على $\mathbb{C}$)، نستنتج أن:

(1) $f^{(n)}(z) = 0$, لكل $z \in \mathbb{C}$

(1) إذن f هي دالة كثيرة حدود من الدرجة أقل أو يساوي $[B] = n - 1$.

⚠ عندما $B = 0$ ، نجد نظرية ليوفيل.

الجزء الثاني (8 درجات)

(1) $u(x,y)$ توافقية على $\mathbb{R}^2$ إذا وفقط إذا كان $\Delta u = 0$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(1) $u(x,y) = \sin x \cosh y$; $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \cos x \cosh y$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \sin x \sinh y$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = -\sin x \cosh y$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \sin x \cosh y$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin x \cosh y + \sin x \cosh y \equiv 0$$

لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

هامش

بما أن u توافقية فإنه يوجد دالة تحليلية f على $\mathbb{C}$ بحيث $f = u + iv$ ، v مرافقة لـ u.

f تحليلية على $\mathbb{C}$ فهي تحقق معادلتي كوشي - ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

1

إذا
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \cos x \cosh y & (1) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\sin x \sinh y & (2) \end{cases}$$

1

بتكامل طرفي المعادلة (1) بالنسبة للمتغير y:

$$v(x,y) = \cos x \sinh y + \alpha(x)$$

بالاشتقاق الآن بالنسبة لـ x ، $v(x,y) = -\sin x \sinh y + \alpha'(x)$

بالمقارنة مع (2) نجد أن $\alpha'(x) = 0$ إذن α ثابت حقيقي 1

إذا $v(x,y) = \cos x \sinh y + \alpha$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$

2) u توافقية على $\mathbb{R}^2$ إذن يوجد دالة تحليلية f على $\mathbb{C}$
بحيث $Re\, f = u$

1

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$
$$= \sin x \cosh y + i(\cos x \sinh y + \alpha)$$

$$f(x,y) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y + i\alpha$$

نضع $z = x + iy$ ، فإن $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ، $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$ 1

$$\sinh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}, \quad \cosh y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$$

$$f(x,y) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + i\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) + i\alpha$$

$$= \frac{1}{4i}\left(e^{(y+ix)} + e^{-y+ix} - e^{y-ix} - e^{-ix-y}\right) + \frac{i}{4}\left(e^{(ix+y)} - e^{ix-y} + e^{y-ix} - e^{-ix-y}\right)$$

$$f(x,y) = \frac{i}{4}\left[\cancel{e^{(ix+y)}} - e^{ix-y} + e^{y-ix} \cancel{- e^{-y-ix}} \cancel{- e^{(y+ix)}} - e^{-y+ix} + e^{y-ix} \cancel{+ e^{-ix-y}}\right]$$

$$f(x,y) = \frac{i}{4}\left[2e^{y-ix} - 2e^{-y+ix}\right] + i\alpha$$

(1) $$y - ix = \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) - i\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \cancel{\bar{z}} + z + \cancel{\bar{z}}\right) = -iz$$

$$-y + ix = -\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + i\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) = \frac{1}{2i}\left(\cancel{\bar{z}} - z - z - \cancel{\bar{z}}\right) = iz$$

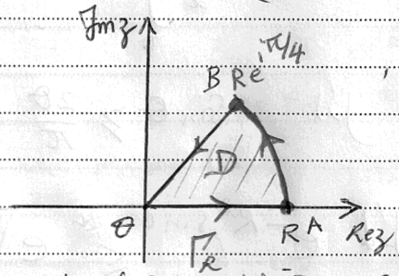
$$f(z) = \frac{i}{2}\left[e^{-iz} - e^{iz}\right] = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + i\alpha$$

(1) $$f(z) = \sin z + i\alpha \;;\; \forall z \in \mathbb{C},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$\theta \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $z = re^{i\theta}$.

$$f(z) = f(r,\theta) = \sin(re^{i\theta}) + i\alpha$$
$$= \sin(\underbrace{r\cos\theta}_{x} + i\underbrace{r\sin\theta}_{y}) + i\alpha$$
$$= \sin(r\cos\theta)\cosh(r\sin\theta) + i\cos(r\cos\theta)\sinh(r\sin\theta) + i\alpha$$

الجزء الثالث: (14 درجة)



نأخذ $f(z) = e^{-z^2}$, (1)

$$D_R = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, 0 \le |z| \le R ,\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4} \right\}$$

f تحليلية على المنطقة D_R (المغلقة) باستخدام نظرية كوشي

(1) $\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$ حيث Γ_R هو حافة D_R

Γ_R متكون من: $\Gamma_R = [OA] \cup \gamma_{AB} \cup [BO]$

- التمثيل الوسيطي لـ Γ_R هو:

(1) $[OA] : [0,R] \longrightarrow \mathbb{C}$
$x \longrightarrow x$

$\gamma_{AB} : [0, \pi/4] \longrightarrow \mathbb{C}$
$\theta \longrightarrow Re^{i\theta}$

$[OB] : [0,R] \longrightarrow \mathbb{C}$
$x \longrightarrow x e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}x(1+i)$

$$\oint_{\Gamma_R} e^{-z^2}\, dz = 0$$

$$0 = \int_0^R e^{-x^2}\, dx + \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2i\theta}}\, iRe^{i\theta}\, d\theta - \int_0^R e^{-\frac{1}{2}x^2 \cdot 2i}\, \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$0 = \int_0^R e^{-x^2}\, dx + i\int_0^{\pi/4} e^{-R^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}\, Re^{i\theta}\, d\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_0^R e^{-ix^2}\, dx$$

$$\left|\int_0^{\pi/4} e^{-R^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}\, Re^{i\theta}\, d\theta\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2\cos 2\theta}\, d\theta$$

$$\le R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2\cos 2\theta}\, d\theta$$

وبما أن $\int_0^{\pi/4} e^{-R\cos 2\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin\theta}\, d\theta$ ②

ونعلم أن $\sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ لكل $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

فإننا لدينا $e^{-R^2\sin\theta} \le e^{-\frac{2\theta R^2}{\pi}}$ لكل $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. وهذا يؤدي:

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin\theta}\, d\theta \le \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R^2}{\pi}\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{-2R^2}\left[e^{-\frac{2R^2\theta}{\pi}}\right]$$

$$\le \frac{\pi}{2R^2}\left[1 - e^{-R^2}\right]$$

فنستنتج أن $\left|\int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2i\theta}}\, iRe^{i\theta}\, d\theta\right| \le \frac{\pi R}{2R^2}\left[1 - e^{-R^2}\right] \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

ونعلم أن $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. إذاً لدينا

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \cdot \int_0^{\infty} e^{-ix^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ ①

بما أن: $e^{-ix^2} = \cos(x^2) - i\sin(x^2)$ فإن:

$$\int_0^\infty e^{-ix^2}dx = \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx - i\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$$

(1)

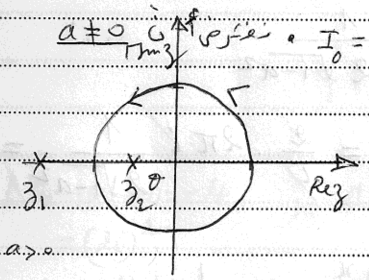
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+i} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-i}{2}\right)$$

فنستنتج أن $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

(2)

$$I_a = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\cos\theta} \quad , \quad -1 < a < 1$$

- عندما $a=0$ ، $I_0 = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$. نفترض أن $\underline{a \neq 0}$



$1 > a > 0$

نعلم أن $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ لكل $\theta\in\mathbb{R}$

- نأخذ Γ دائرة الوحدة $\Gamma = \{z / |z| = 1\}$

نستعمل وسطي لدائرة الوحدة:

$$z(\theta) = e^{i\theta} \ / \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

إذن $dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta$ ، $d\theta = \dfrac{1}{iz}dz$

بعد التعويض: $\cos\theta = \dfrac{z + 1/z}{2} = \dfrac{z^2+1}{2z}$

(2)

$$I_a = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\cos\theta} = \oint_{|z|=1}\frac{1}{1+a\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)}\,\frac{1}{iz}\,dz$$

$$I_a = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{az^2+2z+a} = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} f(z)\,dz$$

حيث $f(z) = \dfrac{1}{az^2+2z+a}$ دالة كسرية

(1)

جذور المقام: $az^2+2z+a=0$ ، المميز $\Delta = 4-4a^2 > 0$

$\Delta = \left(2\sqrt{1-a^2}\right)^2$

$$z_1 = \frac{-2-2\sqrt{1-a^2}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a} \quad , \quad a\neq 0$$

$$z_2 = \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}$$

- بما أن $|z_1 z_2| = 1$ و $|z_1| = \left|\dfrac{1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}\right| > 1$ فإن $|z_2| < 1$ (يعني z_1 يقع خارج قرص الوحدة و z_2 يقع داخل قرص الوحدة).

باستخدام نظرية الرواسب

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i\, Res(f, z_2)$$

بما أن z_2 هو قطب بسيط لـ f

فإن $Res(f,z_2) = \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\, f(z)$

$$= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\,\frac{1}{a(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{a(z_2-z_1)}$$

$$z_2 - z_1 = \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a} - \left(\frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right) = \frac{2\sqrt{1-a^2}}{a}$$ 1

إذن $Res(f,z_2) = \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}}$

لما $-1<a<1$

$$I_a = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\cos\theta} = \frac{2}{\cancel{i}}\, 2\pi \cancel{i}\, \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2+4x+5}\,dx$$

بما أن $\sin x = Im(e^{ix})$ فإن 1

$$J = Im\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}\,dx\right) = Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\,dx\right)$$

$\Delta = 16 - 4\times 5 = -4$

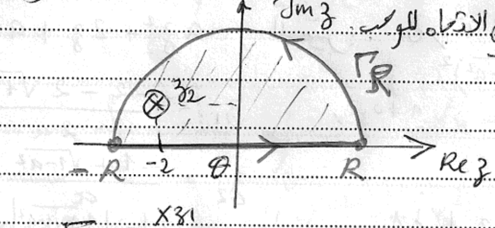
حيث $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5} = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية.

$\deg Q \geq \deg P + 1.$

هذا التكامل المتكامل J متقارب لأن Q ليس له جذور حقيقية.

- نأخذ Γ_R نصف الدائرة العلوية، نصف قطرها $R>0$ ومركزها نقطة الأصل وموجهة في الاتجاه الموجب.

$R \gg 1$



1

$$\Gamma_R = [-R, R] \cup \gamma_R$$

باستخدام نظرية جوردان :

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, e^{iz} dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\oint_{\Gamma_R} f(z) e^{iz} dz = \int_{-R}^{R} f(x)\, e^{ix} dx + \int_{\gamma_R} f(z)\, e^{iz} dz$$

باستخدام الآن نظرية الرواسب ,

1 $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left(f(z)\, e^{iz}, z_k\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2+4z+5}$$

$\Delta = 16-20 = -4 = (2i)^2$ جذري , $z^2+4z+5=0$

Γ_R لا يقع داخل المسار $z_1 = \frac{-4-2i}{2} = -2-i$

Γ_R يقع داخل المسار $z_2 = \frac{-4+2i}{2} = -2+i$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+5} dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z) e^{iz}; z_2\right)$$

بما أن z_2 هو قطب بسيط لـ $g(z) = f(z) \cdot e^{iz}$

1 $$\operatorname{Res}\left(f(z)\, e^{iz}; z_2\right) = \lim_{z\to z_2} (z-z_2)\, f(z)\, e^{iz}$$

$$\operatorname{Res}\left(f(z) e^{iz}; z_2\right) = \lim_{z\to z_2} (z-z_2) \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} e^{iz}$$

$$= \frac{e^{iz_2}}{z_2 - z_1} = \frac{e^{i(-2+i)}}{2i} = \frac{e^{-1-2i}}{2i}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+5} dx = \cancel{2\pi i} \frac{e^{-1-2i}}{\cancel{2i}} = \frac{\pi}{e} e^{-2i}$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5} dx = \frac{-\pi}{e} \sin 2 .$$