جامعـــــة الملك سعـــــود كليـــة العلـــوم قســـم الريـــاضيـــــــات

الفصل الثاني ١٤٣٠-١٤٣١ هـ /٣٨٥-ريض/ الاختبار النهائي / الزمن: ٣ساعات

الجزء الأوّل (١٥ درجة) (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة عن بعضها)

١) لتكن تحليلية $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ و لنفترض أن $f(z)\neq 0$ لكل $z\in\mathbb{C}$. بيَن أنَ $F(x,y)=\ln\left(\left|f(x+iy)\right|\right)$ توافقية, (باعتبار أن $\Re e(f)$ و $\Im m(f)$ ناعمتان بقدر كافي).

٢) أوجد القيمة الصغرى للدالة $\left|f(z)\right|=\left|\dfrac{e^z}{z}\right|$ على الطوق المغلق $\dfrac{1}{2}\leq|z|\leq 1$.

٣) أوجد متسلسلة لورانت للدالة $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$

أ) على الطوق $1<|z|<3$ ب) على الطوق $0<|z+1|<2$.

٤) لتكن $f(z)$ دالة تحليلية عند $z=0$, بحيث $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{n^2-3n+1}{n^2}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$,

أوجد $f(z)$.

الجزء الثاني (١٢ درجة): صنف النقاط الشاذة (في $\mathbb{C}$) للدوال التالية ثم احسب رواسبها:

١) $f(z)=\dfrac{z^n}{z^m-1},\ n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}^*$ ٢) $g(z)=\dfrac{\cos z}{z^2\left(z^2+1\right)}$ ٣) $h(z)=\dfrac{1}{\sin z}$.

الجزء الثالث (١١درجة): باستعمال طريقة الرواسب, بين أن :

١) لكل $a>1$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\sin\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

٢) لكل $\lambda\in\mathbb{R}$, $pv.\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2}e^{-|\lambda|}$

الجزء الرابع (١٢ درجة) :

ليكن Γ_R محيط المستطيل الذي رؤوسه $-R$; R; $R+2i\pi$; $-R+2i\pi$ ($R>>0$ عدد حقيقي موجب كبير و Γ_R مقطوعا بهذا الاتجاه)

١) أوجد تمثيلا وسيطيا لهذا المسار.

٢) استخدم طريقة الرواسب لإثبات أن : لكل $0<a<1$, $pv.\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{e^x+1}dx=\frac{\pi}{\sin a\pi}$

٣) استنتج قيمة التكامل المعتل: $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{t^{a-1}}{1+t}dt$ حيث $0<a<1$.

و الله ولي التوفيـــــق

لا يكتب في هذا الهامش

د. برهان

إصلاح الاختبار النهائي ٣٨٥ ريض
الفصل الثاني ١٤٣١/٣٠ هـ

الجزء الأول (15 درجة)

① الطريقة الأولى: محليًا، نأخذ $z_0\in\mathbb{C}$، فإنه يوجد قرص $D(z_0,r)$ ودالة لوغاريتمية مركبة $\log(f(z))$ تحليلية على $D(z_0,r)$ بحيث $f(D(z_0,r))\subset D(f(z_0),\varepsilon)$ و $0<\varepsilon<|f(z_0)|$ يعني $D(f(z_0),\varepsilon)$ لا يتقاطع مع القاطع نصف المستقيم الذي يمر بالنقطة الأصل والنقطة $-f(z_0)$. بما أن $\log(f(z))$ تحليلية على $D(z_0,r)$ فإن $Re(\log f(z)) = \ln|f(x+iy)| = F(x,y)$ هي دالة توافقية.

الطريقة المباشرة: $F(z)=\frac{1}{2}\ln[f(z)\overline{f(z)}]$ ، $\Delta F = 4\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial \bar z}$ حيث $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ و $\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

لدينا: $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z)=0$ لأن f تحليلية.

ثم استخدم أن: $0=\frac{\partial \bar f}{\partial z}=\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar z}}$ و $\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}=\frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}$

فنحصل أن: $\Delta F=0$

(3)

② القيمة الصغرى للدالة $|f(z)|=\left|\frac{e^z}{z}\right|$ على $\frac{1}{2}\le|z|\le 1$:

هي القيمة العظمى للدالة $\left|\frac{1}{f(z)}\right|=\left|\frac{z}{e^z}\right|$ على $\frac{1}{2}\le|z|\le 1$.

نستخدم الآن مبرهنة القيمة العظمى للدالة $g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{z}{e^z}$، وهي تحليلية على $\mathbb{C}$. فإن القيمة العظمى موجودة على حافة الطوق يعني على $|z|=1$ أو $|z|=\frac{1}{2}$ (دائرتين).

نضع $z=re^{i\theta}$ فإن: $|g(z)|=\frac{r}{e^{r\cos\theta}}$ و $r=1,\frac{1}{2}$ على $|z|=1$ و $|z|=\frac{1}{2}$.

الآن ندرس القيمة العظمى لـ $\frac{r}{e^{r\cos\theta}}$ كدالة بمتغير واحد θ. بما أن الدالة الأسية هي دالة تزايدية. إذن $\cos\theta=-1$ يعني $\theta=\pi$

$$\text{Max}|g(z)| = \begin{cases}\frac{\sqrt{e}}{e} & r=\frac{1}{2},\\ e & r=1\end{cases}$$

ومنه القيمة العظمى لـ $|g(z)|$ هي e وتكون عند $z=-1$.

إذن القيمة الصغرى لـ $|f(z)|$ هي $1/e$ عند $z=-1$.

(3)

لا يكتب في هذا الهامش

(٣) أ) f تحليلية على الطوق $1<|z|<3$ ، إذن f لديها متسلسلة لورانت.

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{2(z+1)}-\frac{1}{2(z+3)} \quad , \quad z\neq -1,\ z\neq -3$$

- إذا كان $|z|>1$ ،

$$\frac{1}{2(z+1)}=\frac{1}{2z(1+1/z)}=\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=\frac{1}{2z}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{2z^3}-\frac{1}{2z^4}+\dots$$ 3

- إذا كان $|z|<3$ ، $$\frac{1}{2(z+3)}=\frac{1}{6(1+z/3)}=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{z}{18}+\frac{z^2}{54}-\dots$$

فإن متسلسلة لورانت لـ f على الطوق $1<|z|<3$ هي:

$$\dots-\frac{1}{2z^4}+\frac{1}{2z^3}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{6}-\frac{z}{18}+\frac{z^2}{54}-\dots$$

ب) f تحليلية على الطوق $0<|z+1|<2$ (مركزه -1) إذن f لديها متسلسلة لورانت.

نضع $u=z+1$. بما $0<|z+1|<2$ فإن $0<u<2$ 3

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{u(u+2)}=\frac{1}{2u(1+u/2)}$$

$$=\frac{1}{2u}\sum_{n=0}^{\infty}(u/2)^n=\frac{1}{2u}\left[1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{4}-\frac{u^3}{8}+\dots\right]$$

$$=\frac{1}{2(z+1)}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}(z+1)-\frac{1}{16}(z+1)^2+\dots$$

(٤) لكل $n\in IN^*$ ، $f\left(\frac{1}{n}\right)=1-\frac{3}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2$

نضع $F(z)=f(z)-1+3z-z^2$

F تحليلية بجوار $z=0$ وبما أن $F\left(\frac{1}{n}\right)=0$ 3

لكل $n\in IN^*$ ، فنستنتج من خلال مبرهنة الامتداد التحليلي

أن $F(z)=0$ لكل z في جوار $z=0$.

يعني $f(z)=1-3z+z^2$ لكل z في جوار 0.

هنا الهامش

الجزء الثاني (12 درجة)

① $f(z)=\dfrac{z^n}{z^m-1}$. f تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{z / z^m-1=0\}$.

$z^m-1=0 \iff z^m=1$

نضع $z=Re^{i\theta}$, $R>0$,

$z^m=R^m e^{im\theta}=1=e^{2ik\pi}$

إذن $\begin{cases}R^m=1\\ m\theta=2k\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}R=1\\ \theta=\dfrac{2k\pi}{m}\end{cases}$

(2) $0\le k\le m-1$, $k\in\mathbb{N}$

f لديها m قطب بسيط عند النقاط $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{m}}$ $(0\le k\le m-1)$.

أيا كان $0\le k\le m-1$ ،

(2) $Res(f,z_k)=Res\left(\dfrac{z^n}{z^m-1} ; e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$

$=\lim_{z\to z_k}(z-z_k)\dfrac{z^n}{z^m-1}=\dfrac{z_k^n}{m z_k^{m-1}}=\dfrac{z_k^{n+1}}{m}$.

② $g(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z^2+1)}$, g تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{0,\pm i\}$

• $z=0$ هو قطب من الرتبة الثانية لـ g .

(2) $Res(g,0)=\dfrac{1}{(2-1)!}\dfrac{d}{dz}\left[z^2 g(z)\right]\Big|_{z=0}$

$=\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{\cos z}{z^2+1}\right]=\dfrac{(-\sin z)(z^2+1)-(\cos z)2z}{(z^2+1)^2}\Big|_{z=0}=0$

• $z=i$ هو قطب بسيط لـ g

(1) $Res(g,i)=\lim_{z\to i}(z-i)\dfrac{\cos z}{z^2(z-i)(z+i)}=\dfrac{\cos i}{-2i}$

$=-\dfrac{1}{2i}\left[\dfrac{e^{-1}+e^{1}}{2}\right]=\dfrac{i}{2}\cosh 1$

• $z=-i$ هو قطب بسيط لـ g ،

(1) $Res(g,-i)=\lim_{z\to(-i)}(z+i)\dfrac{\cos z}{z^2(z-i)(z+i)}=\dfrac{\cos(-i)}{2i}=\dfrac{-i}{2}\cosh 1$.

③ $h(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C} / \sin z=0\}$

$$\sin z = 0 \iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$$

$$\iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 = e^{2ik\pi}, \ k \in \mathbb{Z}$$

(2)

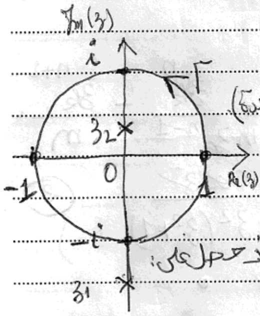
$$\iff z_k = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

أين $k \in \mathbb{Z}$ ، $z_k = k\pi$ هو قطب بسيط لـ h.

(2) $$Res(h, k\pi) = \lim_{z \to k\pi} (z - k\pi) \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\cos(k\pi)} = (-1)^k.$$

الجزء الثالث :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta} \overset{?}{=} \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}, \quad a > 1$$ (1)



- نضع $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, (z تقع على الدائرة الوحدة)

$dz = i e^{i\theta} d\theta = i z \, d\theta$ إذن $d\theta = \frac{dz}{iz}$

$\sin z = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}$. بالتعويض نحصل على:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta} = \oint_\Gamma \frac{1}{a + \left(\frac{z - 1/z}{2i}\right)} \frac{dz}{iz}$$

$$= 2 \oint_\Gamma \frac{dz}{z^2 + 2iaz - 1}$$ (2)

- نضع الآن $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2iaz - 1}$

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{|z_k| < 1} Res(f, z_k).$$ (نظرية الرواسب)

$z^2 + 2iaz - 1 = 0$ ، المميز $\Delta = (2ia)^2 + 4$

$= 4(1 - a^2) < 0$ لأن $a > 1$

$= (2i\sqrt{a^2 - 1})^2$

$z_1 = -i\left[a + \sqrt{a^2 - 1}\right]$. بما أن $|z_1 \cdot z_2| = |-1| = 1$

$z_2 = i\left[\sqrt{a^2 - 1} - a\right]$ ؛ $|z_1| > 1$ فإن $|z_2| < 1$

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}, z_2\right) = \lim_{z\to z_2} (z-z_2)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

3 $$= \frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2i\sqrt{a^2-1}}$$

إذن $$\oint f(z)\,dz = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

هذا يؤدي أن: $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}, \quad a>1$$

c) $$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{x^2+1}\,dx \overset{?}{=} \frac{\pi}{2} e^{-|\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

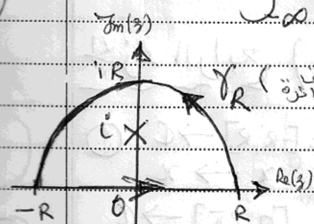
نضع $J_\lambda = \int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda x}{x^2+1}\,dx$ ، بما أن $\lambda \to \cos\lambda x$ زوجية

فإن $J_{-\lambda} = J_\lambda$.

نفترض أن $\lambda > 0$ ،

1 $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\lambda x}{x^2+1}\,dx = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x^2+1}\,dx\right)$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda x}{x^2+1}\,dx$$



نأخذ المسار Γ_R : $\Gamma_R = [-R, R] \cup \gamma_R$

حيث $R \gg 0$ عدد حقيقي موجب كبير

نضع $f(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{z^2+1}$ ، f لديها قطبين بسيطين $z = \pm i$

1 $$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z\to i} (z-i)\frac{e^{i\lambda z}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-\lambda}}{2i}.$$

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \frac{e^{-\lambda}}{2i} = \pi e^{-\lambda}.$$

لدينا 2 $$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\lambda x}}{x^2+1} + \int_0^{\pi} \frac{e^{i\lambda(Re^{i\theta})}}{R^2 e^{2i\theta}+1} iRe^{i\theta}\,d\theta$$

عندما $R \to \infty$,

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{R\, e^{i\lambda(Re^{i\theta})}}{R^2 e^{2i\theta}+1}\, iRe^{i\theta}\, d\theta\right| \leq \frac{R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

إذن $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-\lambda}$

هذا يؤدي إلى: أن $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-\lambda}$ (1)

• عندما $\lambda<0$ فإن $(-\lambda)>0$ وبما أن $\cos(\lambda x)=\cos(-\lambda x)$

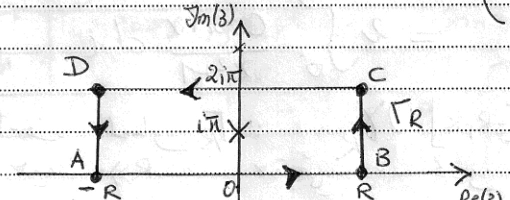
فإن: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{\lambda}$ (1)

• عندما $\lambda=0$ ، $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \left[\tan^{-1}(x)\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}e^0 = \frac{\pi}{2}$

خلاصة: لكل $\lambda\in\mathbb{R}$ ،

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\lambda|}$$

الجزء الرابع (12 د، 4ج)



$[AB]: [-R,R] \to \mathbb{C}$ (1)
$x \to x$

$[BC]: [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ (2)
$x \to R+ix$

$[AD]: [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ و $[DC]: [-R,R] \to \mathbb{C}$
$x \to -R+ix$ ، $x \to x+2i\pi$

(2) نأخذ $0<a<1$ ، نضع $f(z) = \dfrac{e^{az}}{e^z+1}$.

• $e^z+1=0 \iff e^z=-1 \iff e^z = e^{i(2k+1)\pi} \iff z_k = i(2k+1)\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

f لديها قطب بسيط يقع داخل Γ_R
و هو $z_0=i\pi$ ($k=0$).

$$Res(f, i\pi) = \lim_{z\to i\pi}(z-i\pi)\frac{e^{az}}{e^z+1} = \frac{e^{ai\pi}}{e^{i\pi}} = -e^{ai\pi}.$$

نظرية الرواسب: $\displaystyle\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = -2\pi i\, e^{ai\pi}$ حيث (2)

لا يكتب في
هذا الهامش

$$\Gamma_R = [-R,R] \cup [R, R+2i\pi] \cup [R+2i\pi, -R+2i\pi] \cup [-R+2i\pi, -R]$$

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{e^x+1}\,dx + \int_0^{2\pi} f(R+ix)\,i\,dx$$

2

$$- \int_{-R}^{R} f(x+2i\pi)\,dx - \int_0^{2\pi} f(-R+ix)\,dx$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{e^x+1}\,dx + \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+ix)}}{e^{R+ix}+1}\,i\,dx - \int_{-R}^{R} \frac{e^{a(x+2i\pi)}}{e^{x+2i\pi}+1}\,dx$$

$$- \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(-R+ix)}}{e^{-R+ix}+1}\,i\,dx$$

إذن

$$\left(1-e^{2ia\pi}\right) \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{e^x+1}\,dx + i\left[e^{aR} \int_0^{2\pi} \frac{e^{iax}}{e^{R+ix}+1}\,dx - e^{-aR} \int_0^{2\pi} \frac{e^{iax}}{e^{-R+ix}+1}\,dx \right]$$

$$= -2\pi i\, e^{ai\pi}.$$

بما أن

2 $$\left| e^{aR} \int_0^{2\pi} \frac{e^{iax}}{e^{R+ix}+1}\,dx \right| \le \frac{2\pi\, e^{aR}}{e^R-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

لأن

$$\left| e^{-aR} \int_0^{2\pi} \frac{e^{iax}}{e^{-R+ix}+1}\,dx \right| \le \frac{2\pi\, e^{-aR}}{1-e^{-R}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0, \quad 0<a<1$$

فنستنتج أن:

2 $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x+1}\,dx = \frac{-2\pi i\, e^{ai\pi}}{1-e^{2ia\pi}} = \frac{2\pi i}{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}}$$

$$= \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

٣) نضع $t = e^x$ فإن $dt = e^x dx \Leftrightarrow dt = t\,dx$ يعني $dx = \frac{dt}{t}$

بالتكامل بالتعويض،

2 $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x+1}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{t^a}{t+1}\,\frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{t+1}\,dt = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

لكل $0<a<1$.