جامعـــــة الملك سعـــود كليـــة العلـــوم قســـم الرياضيـــــات
الفصل الصيفي ١٤٣١-١٤٣٢ هـ /٣٨٥-ريض / الاختبار النهائي / الزمن: ٣ساعات

الجزء الأوّل (٣٠ درجة) (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة عن بعضها)

١) أوجد الجزئيين الحقيقي و التخيلي للعدد المركب $(1-i)^{10}$.

٢) باستخدام صيغة دوموافر، بيّن أن : $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$.

٣) بيّن أن $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ توافقية وأوجد مرافقها التوافقية. اكتب الدالة f بدلالة z فقط.

٤) أوجد متسلسلة لورانت للدالة $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ على الطوق $1<|z|<2$ ثم استنتج قيمة التكامل $I = \oint_{|z|=\frac{3}{2}} f(z)dz$.

٥) لتكن $f(z)$ دالة تحليلية على القرص المغلق $|z|\le 1$ بحيث $|f(z)|=1$ على دائرة الوحدة $|z|=1$ و $f(z)$ لا تقبل أصفار داخل $|z|\le 1$. بيّن أن : $f(z)=c$ (ثابتة) على $|z|\le 1$.

٦) لتكن $f(z)$ دالة تحليلية عند $z=0$ بحيث $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1-2n}{n^2}$ لكل $n\in\mathbb{N}^*$، أوجد $f(z)$.

٧) لتكن $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ دالة كلية و لنفترض أنه يوجد $M>0$ بحيث $v(x,y) = \Im m f(z) \le M$ لكل $z=x+iy$ من $\mathbb{C}$، حيث $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$. برهن أن $f(z)$ ثابتة على $\mathbb{C}$ (استعمل الدالة e^{-if}).

الجزء الثاني (٨ درجات):

ليكن Γ محيط المربّع الذي رؤوسه 0 ,1 ,$1+i$ و i (مقطوعا بهذا الاتجاه).

١) أوجد تمثيلا وسيطيًا لهذا المسار Γ .

٢) احسب التكاملين المسارين التاليين بطريقة التمثيل الوسيطي : $I_1 = \oint_\Gamma e^z dz$ و $I_2 = \oint_\Gamma \bar{z} dz$.

الجزء الثالث (١٢ درجات):

احسب التكاملات التالية بطريقة الرواسب ، معلّلا كل خطوات الحل:

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}dx \quad , \quad J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \quad , \quad I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} .$$

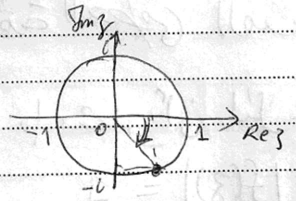
و الله ولي التوفيـــــق

د. برهان

إصلاح الاختبار النهائي للفصل الصيفي ١٤٣٠/٣١هـ

٣٨٥ ريض (التحليل المركب ١)

الجزء الأول (30 درجة):



1 ① $1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$

1 $(1-i)^{10} = 2^5 \left(e^{-i\pi/4}\right)^{10} = 32\, e^{-i\frac{5\pi}{2}}$

$\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ $\qquad = 32\, e^{-i\pi/2} = -32 i$

1 $Re\,(1-i)^{10} = 0 \ , \quad Im\,(1-i)^{10} = -32$

② صيغة دو موافر $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ لكل $n\in\mathbb{N}$

نأخذ $n=3$:

1 $\cos 3\theta = Re\left(e^{i3\theta}\right)$

$= Re\left((\cos\theta + i\sin\theta)^3\right)$

1 $= Re\left[\cos^3\theta - i\sin^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\right]$

1 إذن لكل $\theta\in\mathbb{R}$ ، $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

③ نرى أن $z\neq 0 \ , \ \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

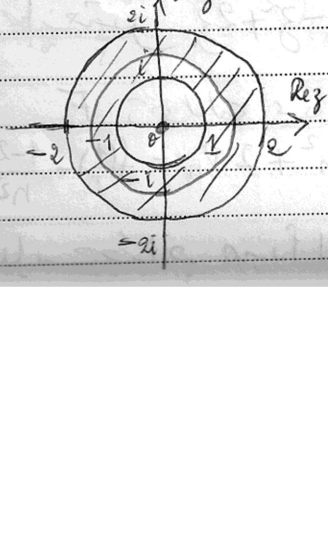
2 إذن $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ هو الجزء الحقيقي لـ $\frac{1}{z}$. بما أن

الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ فإن $u(x,y)$ توافقية

2 على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. كذلك مرافقها التوافقي هو $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + c$

1 لكل $z\neq 0$ ، $f(z) = \frac{1}{z} + cst$ ، cst ثابت مركب

④ $A = \{ z\in\mathbb{C} \ / \ 1 < |z| < 2 \}$



بما أن الدالة $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ تحليلية

على الطوق A فإن f تقبل

لا يكتب

هذا الهامش

(1) على شكل متسلسلة لورانت في جوار 0 ($f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$)

بما أن f دالة كسرية فإن

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2} \quad \text{لكل } z\in\mathcal{A}$$

(1)

$$A=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z}{z-2}=-1$$

$$B=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\lim_{z\to 2}\frac{z}{z-1}=2$$

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{2}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

* بما أن $|z|>1$ فإن $\frac{1}{|z|}<1$,

(1)

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z(1-1/z)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

* كذلك لدينا $|z|<2$ فإن $\left|\frac{z}{2}\right|<1$,

(1)

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{2(z/2-1)}=\frac{-1}{2(1-z/2)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(z/2\right)^n$$

فنجد أن $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^n}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$ لكل $z\in\mathcal{A}$

$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n$ لكل $z\in\mathcal{A}$

(1)

حيث $\begin{cases} a_n=-\frac{1}{2^n}\ ; & n\geq 0 \\ a_n=-1\ ; & n<0 \end{cases}$

$$I=\oint_{|z|=\frac{3}{2}}f(z)\,dz=\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}\right]dz$$

(1)

$$=-\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{dz}{z}=-2\pi i.$$

لا يكتب في هذا الهامش

⑤ بما أن f لا تقبل أصفار على $|z|\leq 1$ فإن الدالة

$\frac{1}{f(z)}$ هي دالة تحليلية على $|z|\leq 1$. نستخدم مبدأ

القيمة العظمى للمقياس على كل من الدالتين $f(z)$ و $\frac{1}{f(z)}$

فإن باعتبار أن لكل $|z|=1$, $|f(z)|=1$ لدينا:

$$\max_{|z|\leq 1} |f(z)| = \max_{|z|=1} |f(z)| = 1$$ 2

و $$\max_{|z|\leq 1} \left|\frac{1}{f(z)}\right| = \max_{|z|=1} \frac{1}{|f(z)|} = 1$$

ومنه فإن لكل $|z|\leq 1$, لدينا $|f(z)|\leq 1$ و $\left|\frac{1}{f(z)}\right|\leq 1$

يعني أن $1 \leq |f(z)| \leq 1$ على $|z|\leq 1$ 1

هذا يؤدي إلى أن $|f(z)|=1$ على $|z|\leq 1$

$|f|$ تقبل قيمة عظمى تساوي 1 عند أكثر من نقطة داخل

القرص $|z|\leq 1$. باستخدام مبدأ القيمة العظمى 1

للمقياس فإن f دالة ثابتة على $|z|\leq 1$

($f(z)=c$ حيث $|c|=1$).

⑦ $f(z)$ تحليلية عند $z=0$ يعني أن f تحليلية على جوار

لـ 0 . أي على قرص مفتوح $|z|<r$.

المتتالية $\{\frac{1}{n}\}$ تتقارب إلى $z=0$ عبر المستقيم الحقيقي. إذاً

يوجد $N\in\mathbb{N}$ بحيث لكل $n>N$ لدينا $v_n=\frac{1}{n}\in D_{(0,r)}$ 2

لنعتبر $F(z) = f(z) - z^2 + 2z$

F تحليلية عند $z=0$ و على $D(0,r)$. لدينا

لكل $n\in\mathbb{N}$ $F(v_n) = f(v_n) - v_n^2 + 2v_n = f(\frac{1}{n}) - \frac{1-2n}{n^2}$ 2

$F(v_n) = 0$

باستخدام مبدأ الامتداد التحليلي ...

(٧) الدالة $e^{-if(z)} = e^{-i(u+iv)} = e^{v-iu}$ هي دالة تحليلية على $\mathbb{C}$ (كلية) ولدينا:

$$|e^{-if(z)}| = |e^{v-iu}| = e^{v} \le e^{M}$$ 1

1

باستخدام نظرية ليوفيل فإن e^{-if} دالة ثابتة على $\mathbb{C}$. 1

يعني يوجد $c \in \mathbb{C}$ بحيث $e^{-if(z)} = c$ لكل $z \in \mathbb{C}$

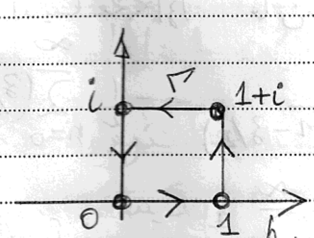
بالاشتقاق بالنسبة لـ z نحصل على أن:

$$-i\, f'(z)\, e^{-if(z)} = 0 \quad \text{لكل } z \in \mathbb{C}$$ 1

إذن $f'(z) = 0$ لكل $z \in \mathbb{C}$، بما أن $\mathbb{C}$ مترابط 1

فإن الدالة f هي ثابتة على $\mathbb{C}$.

الجزء الثاني (8 درجات):



(١) γ محيط المربع الذي رؤوسه 0، 1، $1+i$ و i عبارة عن 4 قطع مستقيمة تمثيلها الوسيطي:

$$z(t) = \begin{cases} t.1 + (1-t).0 & ; \ 0 \le t \le 1 \\ t(1+i) + (1-t).1 & ; \ 0 \le t \le 1 \\ t\,i + (1-t)(i+1) & ; \ 0 \le t \le 1 \\ t.0 + (1-t)(i) & ; \ 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} t & ; \\ 1+it & ; \\ 1-t+i & ; \\ i(1-t) & ; \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$ 4

كذلك يمكن كتابته على الشكل

$$z(t) = \begin{cases} 4t & ; \ 0 \le t \le 1/4 \\ 1+i(4t-1) & ; \ 1/4 \le t \le 1/2 \\ 3-4t+i & ; \ 1/2 \le t \le 3/4 \\ i(4-4t) & ; \ 3/4 \le t \le 1 \end{cases}$$

(2)

$$I_1 = \oint_\Gamma e^z\,dz = \int_0^{1/4} 4e^{4t}\,dt + \int_{1/4}^{1/2} 4i\, e^{1+i(4t-1)}\,dt + \int_{1/2}^{3/4} -4e^{3-4t+i}\,dt$$

$$+ \int_{3/4}^{1} -4i\, e^{i(4-4t)}\,dt = 0$$ (لأن $z \mapsto e^z$ تحليلية على $\mathbb{C}$)

(2)

$$I_2 = \oint_\Gamma \bar{z}\,dz = \int_0^{1/4} 4t \times 4\,dt + \int_{1/4}^{1/2} (1-i(4t-1))\,(4i)\,dt$$

$$+ \int_{1/2}^{3/4} (3-4t+i)\,(-4)\,dt + \int_{3/4}^{1} -i(4-4t)\,(-4i)\,dt$$

$$I_2 = \oint_\Gamma \bar{z}\,dz = 2i \neq 0$$

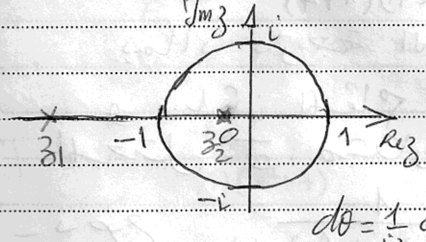
الجزء الثالث (12 درجة)

(لأن $f(\theta) = \frac{1}{2+\cos\theta}$ دالة ...) $I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$

(1)

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}.$$

أ: حيث المسار Γ دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1



$$\Gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\theta \longmapsto z(\theta) = e^{i\theta}$$

$$z = e^{i\theta}$$

$$d\theta = \frac{1}{iz}\,dz \Leftarrow dz = ie^{i\theta}\,d\theta = iz\,d\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \oint_\Gamma \frac{1}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\ \frac{1}{iz}\,dz$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{1}{i}\oint_\Gamma \frac{2\,dz}{4z+z^2+1}$$

(1)

(المميز) $\Delta = 16 - 4 = 12$; $z^2 + 4z + 1 = 0$

$\Delta = (2\sqrt{3})^2$; $z_1 = \frac{-4-\sqrt{12}}{2} = -2-\sqrt{3}$; $|z_1| > 1$.

$z_2 - z_1 = -2+\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$; $z_2 = \frac{-4+\sqrt{12}}{2} = -2+\sqrt{3}$; $|z_2| < 1$.

$$I_2 = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2+4z+1} = 2\pi i \, Res\left(\frac{1}{z^2+4z+1}, z_2\right)$$

بما أن $z=z_2$ هو قطب بسيط لـ $\frac{1}{z^2+4z+1}$

$$Res\left(\frac{1}{z^2+4z+1}, z_2\right) = \lim_{z\to z_2} (z-z_2)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$ 1

$$Res\left(\frac{1}{z^2+4z+1} ; z_2\right) = \frac{1}{z_2-z_1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

إذن
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{1}{\cancel{i}}\,\cancel{2}\,.\,2\pi\cancel{i}\;\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{3}}$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

فنستنتج أن
$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$ 1

$$* \quad J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

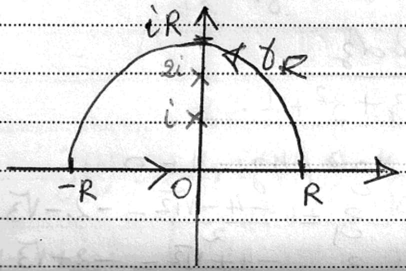
نأخذ الدالة $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$ دالة كسرية

بما أن درجة البسط أصغر من (درجة المقام + 2)

و بما أن المقام ليس له جذور حقيقية فإن التكامل المعتل J متقارب (منته)

- نضع $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$; f لها 4 أقطاب بسيطة $\{\pm i ; \pm 2i\}$. 1

نأخذ المسار Γ_R المتكون من قطعة مستقيم $[-R,R]$ و نصف دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها R



$$\Gamma_R = [-R,R] \cup \gamma_R \;;\; R >> 2$$

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left[Res(f,2i) + Res(f,i)\right]$$ 1

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{1}{(R^2e^{2i\theta}+1)(R^2e^{2i\theta}+4)}\, iRe^{i\theta}\,d\theta\right|$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-4)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

- $\operatorname{Res}(f; 2i) = \lim\limits_{z\to 2i}(z-2i)\,f(z) = \lim\limits_{z\to 2i}\cancel{(z-2i)}\dfrac{1}{(z^2+1)\cancel{(z-2i)}(z+2i)}$

$$= \frac{1}{-3\times 4i} = -\frac{1}{12i}$$

- $\operatorname{Res}(f; i) = \lim\limits_{z\to i}(z-i)\,f(z) = \lim\limits_{z\to i}\cancel{(z-i)}\dfrac{1}{\cancel{(z-i)}(z+i)(z^2+4)}$

$$= \frac{1}{2i\times 3} = \frac{1}{6i}$$

عندما $R\to\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = 2\pi\cancel{i}\left[\frac{1}{6\cancel{i}} - \frac{1}{12\cancel{i}}\right]$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$$ نحسب أن

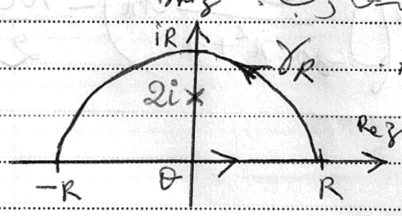
$$K = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+4}\,dx \qquad *$$

نضع $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2+4}$. بما أن f تكتب على الشكل $\dfrac{P(x)}{Q(x)}\cos x$

حيث $\deg P = 0$ و $\deg Q = 2$ و Q ليس لها جذور حقيقية

فإن التكامل المعتل K متقارب.

نأخذ المسار Γ_R حيث $R>>0$.



$$\Gamma_R = [-R, R] \cup \gamma_R$$

$F(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+4}$ لها أقطاب بسيطة عند $z = \pm 2i$

$$\oint_{\Gamma_R} F(z)\,dz = 2\pi i \, Res(F; 2i)$$ 1

$$\oint_{\Gamma_R} F(z)\,dz = \int_{-R}^{R} F(x)\,dx + \int_{\gamma_R} F(z)\,dz$$

$$Res(F, 2i) = \lim_{z \to 2i} (z-2i) F(z) = \lim_{z \to 2i} \cancel{(z-2i)} \frac{e^{iz}}{\cancel{(z-2i)}(z+2i)}$$

$$Res(F, 2i) = \frac{e^{-2}}{4i}$$ 1

$$\left| \int_{\gamma_R} F(z)\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{R^2 e^{2i\theta} + 4} \, iRe^{i\theta} \, d\theta \right|$$

$$\leq \frac{R}{R^2-4} \left| \int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} \, d\theta \right|$$

$$\leq \frac{R}{R^2-4} \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} \, d\theta \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

عند $R \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = 2\pi \cancel{i} \times \frac{e^{-2}}{4\cancel{i}}$$ 1

يعني أن: $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4}\,dx = \frac{\pi e^{-2}}{2}$$

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\,dx = Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4}\,dx \right) = \frac{\pi e^{-2}}{2}$$ 1