



كلية العلوم – قسم الرياضيات – الفصل الصيفي للعام الدراسي ١٤٢٦/١٤٢٧

الزمن: ساعة ونصف

وزن الامتحان: ٥٠ درجة

الامتحان الفصلي النهائي لمقرر ٤٣٤ رياض

س ١

(أ) أثبت أن $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

(ب) أثبت أن $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ لأي عدد صحيح $n \geq 2$.

(ج) أثبت أن $P_{n-2}(n) = 2$ لأي عدد صحيح $n \geq 4$.

(د) أوجد الدالة المولدة لعدد طرق توزيع n كرة على r صندوق بحيث يكون عدد الكرات في كل صندوق فرديا ولا يوجد صندوق خالي.

(و) أوجد معامل x^{20} في مفكوك $(1+x^2+x^4+x^6+\dots)(x^2+x^3+x^4+\dots)^2(x^2+x^4+x^6+\dots)$.

(ز) إذا كانت n عدد زوجي فأوجد الدالة المولدة العادية لعدد طرق اختيار ثلاثة أعداد زوجية من بين الأعداد $1, 2, \dots, n$.

(ط) جد العلاقة الارتدادية للمتتاليات من الطول n التي لا تحتوي على النسق 35 والمكونة من الأرقام $\{1, 3, 5, 7\}$ ، اوجد الشروط الابتدائية.

س ٢

(أ) إذا كانت T شجرة عدد رؤوسها n فأثبت أن عدد أضلاعها يساوي $n-1$.

(ب) إذا كان $G = (V, E)$ رسماً مترابطاً، فأثبت أن $|E| \geq |V| - 1$.

(ج) أثبت أن الرسم $G = (V, E)$ شجرة إذا وفقط إذا وجد بين أي رأسين ممر وحيد.

(د) اختر من المجموعة $\{=, \neq, <, \leq, \geq, >\}$ لملئ الفراغ التالي: إذا كان K_m رسماً جزئياً من الرسم G فإن العدد اللوني للرسم $G \dots m$.

(و) إذا كان G رسماً مستويًا مترابطاً عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه e وطول أقصر دورة فيه هي k ، فأثبت أن

$$e \leq \frac{k}{k-2}(v-2)$$

(ز) أستخدم النتيجة في الفقرة (و) لإثبات أن الرسم $K_{3,3}$ غير مستوي.

(ط) أثبت أن أي رسم مستوي يحتوي رأس درجته على الأكثر 5.

- (أ) إذا كان الرسم $G = (V, E)$ هاملتونياً، فأثبت أن $w(G - S) \leq |S|$ لكل مجموعة جزئية فعلية غير خالية من V ، حيث $w(K)$ يرمز لعدد مركبات الرسم K .
- (ب) أستخدم الفقرة (أ) لإثبات أن الرسم M في الشكل أدناه ليس هاملتونياً.
- (ج) هل الرسم H في الشكل أدناه أويلري ولماذا؟
- (د) أثبت أن الرسم $K_{m,n}$ هاملتوني إذا وفقط إذا كان $m = n$.
- (و) متى يكون الرسم $K_{m,n}$ أويلرياً؟
- (ز) هل $H \cong K$ في الشكل أدناه؟
- (ط) للرسم الموزون W في الشكل أدناه أوجد شجرة مولدة أصغر، ثم أوجد وزنها.
- (ي) مستخدماً خوارزمية دايجسترا، جد للرسم الموزون W في الشكل أدناه شجرة مولدة تحوي أقصر الممرات من x إلى باقي رؤوس الرسم.

