الاختبار الفصلي الأول
في المقرر 151 ريض

السؤال الأول

أ- أثبت أن: $(p \wedge \neg q) \to (r \vee q) \equiv (p \to q) \vee r$. (3 درجات)

ب- بدون استخدام الجداول، أثبت أن العبارة التالية مصدوقة:
$(u \wedge v) \to [w \to (u \wedge v \wedge w)]$. (3 درجات)

السؤال الثاني

أ- ليكن n عددًا صحيحا. باستخدام البرهان بالمكافئ العكسي أثبت ما يلي:
"إذا كان $n^2 - 1$ عددا فرديا فإن n عدد زوجي". (درجتان)

ب- لتكن x, y, z أعدادًا حقيقية بحيث $x + y + z = 20$. استخدم طريقة البرهان بالتناقض لإثبات أن:
$x \geq 10$ أو $y \geq 6$ أو $z \geq 4$. (درجتان)

السؤال الثالث

أ- باستخدام الاستقراء الرياضي، أثبت أن $n^2 - n - 6$ عدد موجب لكل عدد صحيح $n \geq 4$.
(3 درجات)

ب- إذا كانت المتتالية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ معرفة كما يلي:
$u_1 = 2, u_2 = 4$ و $u_n = \dfrac{2u_{n-1} + u_{n-2} + 8}{3}$ لكل عدد صحيح $n \geq 3$، فأثبت أن $u_n = 2n$
لكل عدد صحيح $n \geq 1$. (4 درجات)

السؤال الرابع

أ- لتكن R العلاقة المعرفة على المجموعة $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ كما يلي: $xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$.

i. اكتب العلاقة R كمجموعة أزواج مرتبة. (درجتان)

ii. أوجد كلا من مجال ومدى العلاقة R. (درجتان)

iii. مثّل العلاقة R برسم موجَه. (درجة)

ب- لتكن $S = \{(a,b), (a,c), (b,a), (c,a)\}$ علاقة على المجموعة $B = \{a, b, c\}$.
أوجد كلا من S^2 و S^3 . (3 درجات)

تصحيح الاختبار الشهري الأول الفصل الثاني ٢٧/١/١٤٤١هـ

١٠١ ريض

السؤال الأول: (6 درجات)

(أ) $(p\wedge\neg q)\to(r\vee q)\overset{?}{\equiv}(p\to q)\vee r$

$(p\wedge\neg q)\to(r\vee q)\equiv\neg(p\wedge\neg q)\vee(r\vee q)$

(3) $\equiv\neg p\vee q\vee r\vee q$

$\equiv(\neg p\vee q)\vee r$

$\equiv(p\to q)\vee r$

(ب) $(u\wedge v)\to[w\to(u\wedge v\wedge w)]\equiv$

$\neg(u\wedge v)\vee[\neg w\vee((u\wedge v)\wedge w)]\equiv$

$\neg A\vee[\neg w\vee(A\wedge w)]\equiv$

(3) $(\neg A\vee\neg w)\vee(A\wedge w)\equiv$

$\neg(A\wedge w)\vee(A\wedge w)\equiv$

$\neg B\vee B\equiv T$ مصدوقة

السؤال الثاني: (4 درجات)

(أ) المنافي العكسي للعبارة هي: "إذا كان n فردياً فإن (n^2-1) هو زوجي"

(1) الاثبات: نأخذ n عدد فردي فإن $n=2k+1$ حيث k عدد صحيح

وبالتالي

$n^2-1=(2k+1)^2-1$

$n^2-1=4k^2+4k+1-1$

(1) $n^2-1=2(2k^2+2k)=2M$

يعني (n^2-1) هو عدد زوجي

(ب) (1) نفترض أن $x<10$ و $y<6$ و $z<4$

(1) فإن $20=x+y+z<20$ ↯ و هذا يتناقض مع المعطى أن $x+y+z=20$

(15)

(أ) نضع $P(n) : n^2 - n - 6 \geq 0$

• خطوة الانطلاقية : $\boxed{n=4}$

$4^2 - 4 - 6 = 6 \geq 0$ وبالتالي $P(4)$ صادق .

• خطوة الاستقراء : نأخذ $k \geq 4$ ونفترض أن $P(k)$ صادق
(أي من لدينا $k^2 - k - 6 \geq 0$) فلنثبت صحة $P(k+1)$

(0,5)

$$(k+1)^2 - (k+1) - 6 \overset{?}{\geq} 0$$

(0,5) + (0,5)

$$(k+1)^2 - (k+1) - 6 = k^2 + 2k + 1 - k - 1 - 6$$

(1)

$$= \underbrace{(k^2 - k - 6)}_{\geq 0} + 2k \geq 8 \geq 0$$

من خلال المبدأ الأول للاستقراء الرياضي لكل $n \geq 4$ (عدد صحيح)

$$n^2 - n - 6 \geq 0$$

(ب) نضع $P(n) : \quad U_n = 2n$

• خطوة الأساسية :

$n=1$	$n=2$
$\underset{2}{\underset{\parallel}{u_1}} \overset{?}{=} 2 \times 1$	$\underset{4}{\underset{\parallel}{u_2}} \overset{?}{=} 2 \times 2 = 4$
صح وبالتالي $P(1)$ صادق	صح وبالتالي $P(2)$ صادق
(0,5)	(0,5)

• خطوة الاستقراء : نأخذ $k \geq 3$. نفترض أن $P(3), \dots, P(k)$
جميعها صادقة فلنثبت صحة $P(k+1)$ (0,5) $u_{k+2} \overset{?}{=} 2(k+1)$

(0,5) بما أن $u_{k+1} = \dfrac{2u_k + u_{k-1} + 8}{3}$

(0,5) وبما أن $P(k)$ صادق فإن لدينا $u_k = 2k$

(0,5) كذلك $P(k-1)$ صادق فإن لدينا $u_{k-1} = 2(k-1)$

(1) عندئذ $u_{k+1} = \dfrac{2(2k) + 2(k-1) + 8}{3} = \dfrac{6k+6}{3}$

$$u_{k+1} = 2(k+1)$$

السؤال الرابع (8 درجات)

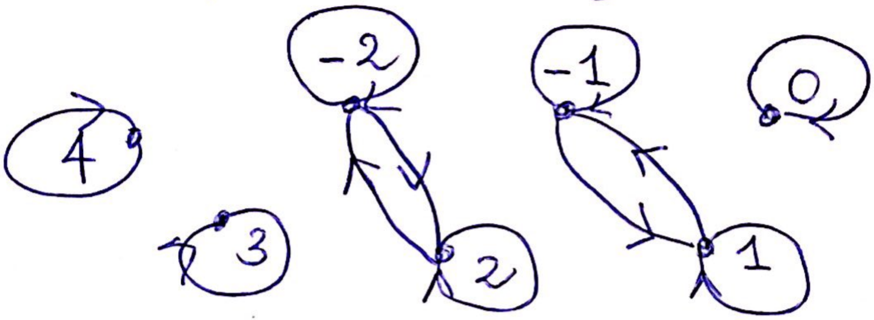
(أ)

(i) 2 — $R = \{(-2,-2); (-2,2); (-1,-1); (-1,1); (0,0); (1,-1); (1,1); (2,-2); (2,2); (3,3); (4,4)\}$

(ii) 1 — مجال R هو $D_R = \{-2,-1,0,1,2,3,4\}$

1 — مدى R هو $Im\,R = \{-2,-1,0,1,2,3,4\}$

(iii) 1



(ب)

1,5 — $S^2 = SoS = \{(a,a);(b,b);(b,c);(c,b);(c,c)\}$

1,5 — $S^3 = S^2 o S = \{(a,b);(a,c);(c,a);(b,a)\}$

Scanned by CamScanner