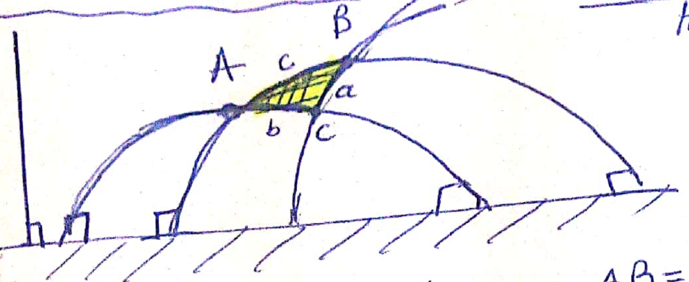
المثلث الزائدي : في نصف المستو العلوي $\mathbb{H}^2$

Hyperbolic triangular

$\mathbb{H}^2 = \{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z > 0 \}$

الخطوط أو المستقيمات الزائدية



$\cos \hat{A} = \dfrac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c}$

$BC = a \quad , \quad AC = b \quad , \quad AB = c$

لدينا

- $\boxed{\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \hat{A}}$
- قاعدة الجيوب $\boxed{\dfrac{\sinh a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{\sinh b}{\sin \hat{B}} = \dfrac{\sinh c}{\sin \hat{C}}}$

مساحة المثلث $= \pi - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$

$\boxed{\cosh a = \dfrac{\cos \hat{A} + \cos \hat{B} \cos \hat{C}}{\sin \hat{B} \sin \hat{C}}}$

نصف المستو العلوي الزائدي

- $d_{\mathbb{H}^2}\big(P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)\big) = \cosh^{-1}\left(1 + \dfrac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2 y_1 y_2}\right)$

- حالة خاصة :
- $d_{\mathbb{H}^2}\big(P(x_0, y_1), Q(x_0, y_2)\big) = \left| \ln \dfrac{y_2}{y_1} \right|$

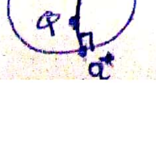
مثال 1

① نعتبر في نصف المستو الزائدي العلوي $\mathbb{H}^2$ المثلث $z_1 = i \; , \; z_2 = 1 + i \; , \; z_3 = 1 + 3i$

ارسم أضلاع المثلث الزائدي (z_1, z_2, z_3) واحسب أطوالها.

② نعتبر تحويل موبيوس $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$, $z \to \dfrac{2z + 1}{5z + 3}$. تحقق حسابيا من كون المثلثين الزائدين (z_1, z_2, z_3) و $(f(z_1), f(z_2), f(z_3))$ متطابقين

⚠ في القرص الزائدي Poincaré $\mathbb{D} = \{ |z| < 1 \}$



$d_{\mathbb{D}}(P, Q) = \cosh^{-1}\left(1 + 2 \dfrac{|P - Q|^2}{(1 - |P|^2)(1 - |Q|^2)}\right)$

لتكن :

$$S(z) = [z, \alpha, \beta, \gamma] = \frac{z-\beta}{z-\gamma}\,\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}$$

⚠ لكل $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ مختلفة و $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ مختلفة كذلك

توجد دالة خطية كسرية وحيدة تحول z_1 إلى w_1

z_2 إلى w_2 و z_3 إلى w_3

نضع

$$S_1(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$$

$$S_2(z) = [z, w_1, w_2, w_3]$$

فان

$$\boxed{T = S_2^{-1} \circ S_1}$$

<u>تطبيق</u> : نعتبر في نصف المستوي العلوي الزائدي $\mathbb{H}^2$ النقاط

$z_1 = 2+4i$, $z_2 = 5+5i$, $z_3 = 4+2i$ و النقاط $w_1 = 1+i$

$w_2 = 1+2i$ و $w_3 = 2+i$

1. بين أن المثلثين الزائديين $\Delta(z_1 z_2 z_3)$ و $\Delta(w_1, w_2, w_3)$ متطابقان

2. جد صيغة التقايس الزائدي $T : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$

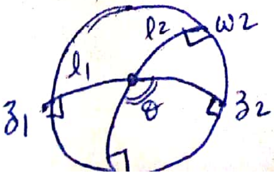
الذي يحول $\Delta(z_1 z_2 z_3)$ إلى $\Delta(w_1, w_2, w_3)$.

⚠ ليكن $w = f(z)$ التحويل موبيس (Mobius Transformation) الذي يحول z_1 إلى w_1 ; z_2 إلى w_2
و z_3 إلى w_3 . فإن لدينا :

$$\left(\frac{w-w_1}{w-w_3}\right)\left(\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}\right) = \left(\frac{z-z_1}{z-z_3}\right)\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad ; \quad ad-bc \neq 0$$

⚠ في القرص Poincaré الزائدي تقاطع مستقيمان زائديان



$$[z_1, w_1, z_2, w_2]\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = -1$$