سبق أن ذكرنا في مستهل هذا الفصل أن الدالة $\hat{f}$ حلّت محل معـاملات فوريير عندما انتقلنا من الدوال الدورية إلى الدوال غير الدورية، ومـا المعادلـة (6.14) سـوى الوجه الآخر لسلوك هذه المعاملات عندما $n \to \infty$. لكن النظرية (6.2)، وهي تحدد بعض خواص التحويـل $\hat{f}$ ، لا تتطرق إلـى الخاصـة الأساسـية المستمدَّة مـن العلاقـة (6.3)، ألا وهي إمكانية تمثيل الدالة f بالتكامل

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \tag{6.15}$$

فكأن هذه الصيغة تمثل التحويل العكسي

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

الذي نستعيد به الدالة f، أي أن

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \tag{6.16}$$

لكن التكـامل (6.15)، المعـروف **بتكـامل فوريـير** (Fourier integral) قـد لا يكـون موجودا، إذا لم تتلاش الدالة $\hat{f}$ عندما $|\xi| \to \infty$ بالسرعة الكافيـة، وإن وجـد فقـد لا تتحقق المساواة (6.16) نقطيا على $\mathbb{R}$. هذا ما سنبحثه في البند القادم.

تمارين (6.1)

(1) (i) إذا كانت الفترة I محدودة فأثبت أن

$f \in \mathcal{L}^2(I) \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(I)$.

(ii) إذا كانت f دالة محدودة على I فأثبت أن

$f \in \mathcal{L}^1(I) \Rightarrow f \in \mathcal{L}^2(I)$.

(2) افرض أن $\varphi : J \times I \to \mathbb{C}$ حيث I و J فـترتان فـي $\mathbb{R}$ وأن $\varphi(\cdot,x)$ دالـة متصلـة على J لكـل $x \in I$. إذا كان $|\varphi(\xi,x)| \le g(x)$ لكـل $x \in J$، حيث $g \in \mathcal{L}^1(I)$ ،

فاستخدم نظرية التقارب المسقوف (6.1) لإثبات أن الدالة $F(\xi)=\int_I\varphi(\xi,x)dx$ متصلة على J.

(3) إذا كانت الدالة $\varphi(\cdot,x)$ في التمرين (2) متصلة قطعيًا على J فأثبت أن الدالة F أيضا متصلة قطعيًا على J.

(4) إذا كانت الدالة $\varphi_\xi(\cdot,x)$ في التمرين (2) متصلة على J فأثبت أن F قابلة للاشتقاق وأن $F'(\xi)=\int_I\varphi_\xi(\xi,x)dx$ متصلة على J.

(5) واضح أن

$$\int_0^\infty e^{-\xi x}dx=\frac{1}{\xi}\quad\forall\xi>0$$

أثبت أن لأي عدد موجب a فإن

$$\int_0^\infty x^n e^{-\xi x}dx=\frac{n!}{\xi^{n+1}}\quad\forall\xi\geq a\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

وعندما $\xi = 1$ نحصل على التمثيل التالي لمضروب العدد n

$$n!=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=\Gamma(n+1)$$

(6) إذا كان a أي عدد موجب فاستخدام النظرية (6.1) لاستنتاج أن التكامل المعتل

$$\Gamma(\xi)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\xi-1}dx$$

دالة متصلة على $[a,\infty)$ وأن جميع مشتقاتها

$$\Gamma^{(n)}(\xi)=\int_0^\infty e^{-x}\frac{d^n}{d\xi^n}(x^{\xi-1})dx$$

متصلة على $[a,\infty)$. استنتج من ذلك أن Γ دالة تحليلية على $(0,\infty)$.

(7) استخدم التمهيد (6.1) وخواص نواة ديريشليه (راجع البند (3.2)) لتقويم النهايات التالية

$$\text{(i)}\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} D_n(\xi)d\xi$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi/2} D_n(\xi)d\xi$$

$$\text{(iii)}\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} D_n(\xi)d\xi$$

$$\text{(iv)}\quad \lim_{n\to\infty}\int_{\pi/2}^{\pi} D_n(\xi)d\xi$$

(8) افرض أن كلا من الدالتين f و g ملساء قطعيا على (a,b) وأن نقاط عدم اتصال الدالتين ومشتقتيهما هي $\{x_1,\ldots,x_n\}$. أثبت صحة التعميم التالي لقانون التكامل بالتجزيء:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b^-)g(b^-) - f(a^+)g(a^+) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$
$$+\sum_{i=1}^n g(x_i^-)[f(x_i^+)-f(x_i^-)] + \sum_{i=1}^n f(x_i^-)[g(x_i^+)-g(x_i^-)]$$
$$+\sum_{i=1}^n [f(x_i^+)-f(x_i^-)][g(x_i^+)-g(x_i^-)]$$

(6.2) تكامل فورير

ليس من العسير التحقق من وجود التكامل المعتل (راجع التمرين 1.3.10)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

وذلك بملاحظة أن $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ، وأن

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n A_n \tag{6.17}$$

حيث

$$A_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx > 0 \quad , \quad n = 0,1,2,\cdots$$

5.39 Assuming $u(r,t) = v(r)w(t)$ leads to

$$\frac{w'}{kw} = \frac{1}{v}\left(v'' + \frac{1}{r}v'\right) = -\mu^2.$$

Solve these two equations and apply the boundary condition to obtain the desired representation for u.

5.41 Use separation of variables to conclude that

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k r)[a_k \cos \mu_k ct + b_k \sin \mu_k ct),$$

$$a_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k R)} \int_0^R f(r) J_0(\mu_k r) r dr,$$

$$b_k = \frac{2}{c\mu_k R^2 J_1^2(\mu_k R)} \int_0^R g(r) J_0(\mu_k r) r dr.$$

Chapter 6

6.1 (a) $\hat{f}(\xi) = \frac{2}{\xi^2}(1 - \cos \xi)$. (c) $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{i\xi}\left(1 - e^{-i\xi}\right)$.

6.3 For any fixed point $\xi \in J$, let ξ_n be a sequence in J which converges to ξ. Because

$$|F(\xi_n) - F(\xi)| \le \int_I |\varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)|\, dx,$$

and $|\varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)| \le 2g(x) \in \mathcal{L}^1(I)$, we can apply Theorem 6.4 to the sequence of functions $\varphi_n(x) = \varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)$ to conclude that

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |F(\xi_n) - F(\xi)| &\le \lim_{n\to\infty} \int_I |\varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)|\, dx \\ &= \int_I \lim_{n\to\infty} |\varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)|\, dx = 0.\end{aligned}$$

6.5 Suppose $\xi \in J$, and let $\xi_n \to \xi$. Define

$$\psi_n(x,\xi) = \frac{\varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)}{\xi_n - \xi},$$

then $\psi_n(x,\xi) \to \varphi_\xi(x,\xi)$ pointwise. ψ_n is integrable on I and, by the mean value theorem, $\psi_n(x,\xi) = \varphi_n(x,\eta_n)$ for some η_n between ξ_n and ξ.

ب) نشتق $\frac{1}{\text{ع}} = \int_{0}^{\infty} e^{-\text{ع}x}\,dx$ بالنسبة ع (هذا يسمح

بالاشتقاق) فنحصل على العلاقة المطلوبة.

Therefore $|\psi_n(x,\xi)| \leq h(x)$ on $I \times J$. Now use the dominated convergence theorem to conclude that $\int_I \psi_n(x,\xi)dx \to \int_I \varphi_\xi(x,\xi)dx$. This proves

$$\frac{F(\xi_n) - F(\xi)}{\xi_n - \xi} \to \int_I \varphi_\xi(x,\xi)dx.$$

The continuity of F' follows from Exercise 6.3.

6.8 (a) 1, (b) 1/2, (c) 0.

6.9 Express the integral over (a,b) as a sum of integrals over the subintervals $(a,x_1),\ldots,(x_n,b)$. Because both f and g are smooth over each subinterval, the formula for integration by parts applies to each integral in the sum.

6.10 (a) f is even, hence $B(\xi) = 0$, $A(\xi) = 2\int_0^\pi \sin x \cos \xi x \; dx = 2\dfrac{1+\cos \pi\xi}{1-\xi^2}$,

and $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+\cos x\xi}{1-\xi^2}\cos x\xi \; d\xi.$

(c) $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\xi - \sin\xi}{\xi^2}\sin x\xi \; d\xi.$

6.13 Define

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\cos x, & x > 0 \\ -e^{x}\cos x, & x < 0. \end{cases}$$

Because f is odd its cosine transform is zero and

$$B(\xi) = 2\int_0^\infty e^{-x}\cos x \sin \xi x \; dx = \frac{2\xi^3}{\xi^4 + 4}.$$

Now $f(x)$ may be represented on $(-\infty,\infty)$ by the inversion formula (6.28),

$$e^{-x}\cos x = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi^3}{\xi^4+4}\sin x\xi \; d\xi.$$

Because f is not continuous at $x = 0$, this integral is not uniformly convergent.

6.15 Extend

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

as an odd function to $\mathbb{R}$ and show that its sine transform is $B(\xi) = 2(1-\cos\pi\xi)/\xi$.

6.17 Show that the cosine transform of f is

$$A(\xi) = 2\frac{1-\cos\xi}{\xi^2} = \frac{\sin^2(\xi/2)}{(\xi/2)^2}.$$

Express $f(x)$ as a cosine integral and evaluate the result at $x = 0$, which is a point of continuity of f.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \quad , \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi)e^{ix\xi}dx$$

يمثلان دالتين متصلتين ومحدودتين على $\mathbb{R}$، هما $2\pi f(x)$ و $2\pi g(x)$ بالترتيب. نستنتج من ذلك أن الدوال f، g، $\hat{f}$ ، $\hat{g}$ جميعها تقع في $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ، وأن

$$\begin{aligned} 2\pi\langle f,g\rangle &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\hat{g}(\xi)e^{ix\xi}}d\xi dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,dxd\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi \\ &= \langle \hat{f},\hat{g}\rangle \end{aligned} \tag{6.30}$$

وعندما تكون $g = f$ فإننا نحصل على العلاقة

$$||\hat{f}||^2 = 2\pi||f||^2 \tag{6.31}$$

التي تناظر **متطابقة بارسيفال** (1.12)، وتشكل مع المعادلة (6.30) ما يسمى **بنظرية بلانشيريل** (Plancherel theorem). وحقيقة الأمر أن (6.30) و (6.31) تظل صحيحة لأي $f,g\in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ لكن برهان ذلك يعتمد على إثبات أن $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ كثيفة في $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ، بمعنى أن كل $f\in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ هي نهاية، في $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ، لمتتالية من الدوال في $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (انظر [8]).

تمارين (6.2)

أوجد تكامل فورير لكل من الدوال المعطاة في التمارين (1) إلى (5):

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x| & , \quad |x|< \pi \\ 0 & , \quad |x|> \pi \end{cases} \tag{1}$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0<x<1\\ 0 & , \quad x<0 \ , \ x>1\end{cases} \tag{2}$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & , \quad 0<x<\pi\\ 0 & , \quad x<0 \ , \ x>\pi\end{cases} \tag{3}$$

$$f(x)=xe^{-|x|} \quad , \quad x\in\mathbb{R} \tag{4}$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & , \quad 0<x<\pi/2\\ -\cos x & , \quad -\pi/2<x<0\end{cases} \tag{5}$$

(6) استنتج من التمرين (3)أن

$$\int_0^\infty \frac{\xi\sin\pi\xi}{1-\xi^2}d\xi=\frac{\pi}{2}$$

(7) أثبت أن

$$\int_0^\infty \frac{\xi^3\sin x\xi}{\xi^4+4}d\xi=\frac{\pi}{2}e^{-x}\cos x \quad \forall x>0$$

هل هذا التكامل متقارب بانتظام على $(0,\infty)$؟

(8) أثبت أن

$$\int_0^\infty \frac{\xi\cos x\xi}{1+\xi^2}d\xi=\frac{\pi}{2}e^{-x} \quad \forall x>0$$

هل هذا الكامل متقارب بانتظام على $(0,\infty)$؟

(9) أثبت أن

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos\pi\xi}{\xi}\sin x\xi d\xi=\begin{cases}\pi/2 & , \quad 0<x<\pi\\ 0 & , \quad x>\pi\end{cases}$$

(10) أثبت أن

$$\mathcal{F}[e^{-|x|}](\xi)=\frac{2}{1+\xi^2}$$

ثم استخدم ذلك لإيجاد $\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](\xi)$.

(11) على اقتراض أن

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & , \ |x|\le 1\\ 0 & , \ |x|>1\end{cases}$$

أثبت أن

$$\hat{f}(\xi)=\left[\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}\right]^2$$

ثم استنتج أن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\xi}{\xi^2}d\xi=\pi$$

(12) تحقق من صحة العلاقة

$$\|\hat{f}\|^2=2\pi\|f\|^2$$

عندما تكون $f(x)=e^{-|x|}$.

(13) عبر عن العلاقة (6.31) بدلالة التحويلين A و B المعرفين في (6.23) و(6.24).

(6.3) خواص تحويل فورير وتطبيقاته

تنص النظرية التالية على خواص الاشتقاق الأساسية التي تميِّز تحويل فورير وتجعله أداة لا غنى عنها في التعامل مع المعادلات التفاضلية الخطية.

نظرية (6.4)

افرض أن $f\in\mathscr{L}^1(\mathbf{R})$

(i) إذا كان $x\,f(x)\in\mathscr{L}^1(\mathbf{R})$ فإن الدالة $\hat{f}$ قابلة للاشتقاق، ومشتقتها

$$\hat{f}'(\xi)=-i\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)e^{-i\xi x}dx=\mathcal{F}[-ixf(x)](\xi) \qquad (6.32)$$

لا يكتب في
هذا الهامش

① إذا f زوجية ⟸ $B(\xi)=0$

$$A(\xi) = 2\int_0^{\pi} \sin x \cos \xi x \, dx$$
$$= 2 \cdot \frac{1+\cos \pi\xi}{1-\xi^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1+\cos \pi\xi}{1-\xi^2} \cos x\xi \, d\xi$$

⑧ عرف

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\cos x , & x>0 \\ -e^{x}\cos x , & x<0 \end{cases}$$

حيث أن f فردية فإن تكامل جيب التمام لها = صفر

$$B(\xi) = 2\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x \sin \xi x \, dx = \frac{2\xi^3}{\xi^4+4}$$

إذا $f(x)$ ~~[illegible]~~ ربما غير قابلة للتكامل على الفترة $(-\infty,\infty)$
بالصيغة العكسية (6.29) يكون كالتالي

$$e^{-x}\cos x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\xi^3}{\xi^4+4} \sin x\xi \, d\xi$$

حيث أن f ليست متصلة عند $x=0$ فإن هذا
التكامل الأخير ليس متقاربًا بانتظام

⑨ هناك تصحيح في فرع أ من السؤال

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2} , & 0<x<\pi \\ \frac{\pi}{4} , & x=\pi \\ 0 , & x>\pi \end{cases}$$

نمدد الدالة $f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}$ كدالة فردية على $\mathbb{R}$ فإن تكامل

الجيب لها هو :
$$B(\xi) = \frac{2(1-\cos \pi\xi)}{\xi}$$

(11) اثبت أن تحويل جيب التمام لـ f هو :

$$A(\xi) = 2 \cdot \frac{1-\cos\xi}{\xi^2} = \frac{\sin^2(\xi/2)}{(\xi/2)^2}$$

عبر عن f بتكامل جيب التمام واحسب التكامل عند $x = 0$ ، التي هي نقطة اتصال لـ f

(13) المعادلة (6.31) تقتضي أن

$$\|\hat{f}\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 = 2\pi \|f\|^2$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi}{1-\xi^2}\left[\sin(\xi(\pi - x)) - \sin \xi x\right] d\xi$$ (3)

(6) في الحل في تمرين (3) ضع $x = \pi$

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi}{1-\xi^2}\left[-\sin \xi\pi\right] d\xi$$

$$\frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi}{1-\xi^2}\sin\xi\pi \, d\xi$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\xi \sin \xi\pi}{1-\xi^2} d\xi$$

(7) نوجد تكامل فورير للجيب للدالة $f(x) = e^{-x}\cos x$ ، $0 < x < \infty$ فنجد العلاقة المطلوبة.

~~(8) نوجد تكامل فورير للجيب للدالة $f(x) = e^{-x}$ ، $0 < x < \infty$ فنجد العلاقة المطلوبة.~~

س١ (تفصيل الكل)

لأن F دالة زوجية فإن $B(\xi)=0$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A(\xi) \cos(x\xi)\, d\xi$$

$$A(\xi) = 2 \int_0^\infty F(x) \cos(x\xi)\, dx$$

$$= 2 \int_0^\pi \sin x \cdot \cos(x\xi)\, dx$$

$$= 2 \int_0^\pi \frac{\sin(1+\xi)x + \sin(1-\xi)x}{2}\, dx$$

توضيح

$$\cos(1+\xi)\pi = \cos(\pi+\pi\xi)$$
$$= \cos\pi \cos\pi\xi - \sin\pi \sin\pi\xi$$
$$(-1)\cos\pi\xi - 0$$

$$= \left.\frac{-\cos(1+\xi)x}{1+\xi}\right|_0^\pi - \left.\frac{\cos(1-\xi)x}{1-\xi}\right|_0^\pi$$

$$= \frac{+1}{1+\xi}\left[+\cos(\pi\xi) + 1\right]$$

$$+ \frac{1}{1-\xi}\left[+\cos(\pi\xi) + 1\right]$$

$$A(\xi) = \left(\cos(\pi\xi) + 1\right)\left[\frac{1}{1+\xi} + \frac{1}{1-\xi}\right]$$

$$= \left(\cos(\pi\xi) + 1\right)\left(\frac{2}{1-\xi^2}\right)$$

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\left(\cos(\pi\xi) + 1\right)}{1-\xi^2} \cdot \cos(x\xi)\, d\xi$$

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t}e^{i\xi x}d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-i\xi y}dy\right]e^{-k\xi^2 t}\ e^{i\xi x}d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{i(x-y)\xi}e^{-k\xi^2 t}d\xi dy$$

على افتراض أنه يجوز تبديل ترتيب التكامل بالنسبة للمتغيرين ξ و y. بما أن الدالة $e^{-k\xi^2 t}$ زوجية في ξ فإن

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}f(y)\cos(x-y)\xi\ e^{-k\xi^2 t}d\xi dy \qquad (6.46)$$

بما يتفق مع النتيجة السابقة.

تمارين (6.3)

(1) أثبت صحة العلاقتين

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi)$$

$$\mathcal{F}[e^{iax}f(x)](\xi) = \hat{f}(\xi-a)$$

(2) تعرَّف **دالة هرميت** ذات الرتبة n بأنها

$$\Psi_n(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}H_n(x) \qquad , \qquad -\infty < x < \infty$$

حيث H_n كثيرة حدود هرميت ذات الرتبة n. أثبت أن

$$\hat{\Psi}_n(\xi) = i^n\sqrt{2\pi}\,\Psi_n(\xi)$$

(3) أوجد حل معادلة الحرارة

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) \quad , \quad 0 < x < \infty, t > 0$$

بالشروط الحدية

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 < x < \infty$$

حيث $f \in \mathscr{L}^1(0,\infty)$.

(4) أوجد حل المعادلة التكاملية

$$\int_0^\infty f(x)\cos\xi x dx = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < \xi < \pi \\ 0 & , \quad \pi < \xi < \infty \end{cases}$$

(5) أثبت أن

$$\int_0^\infty e^{-k\xi^2 t}\cos(x-y)\xi d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{kt}} e^{-(x-y)^2/4kt}$$

(6) (i) استخدم نتيجة التمرين (5) في المعادلة (6.45) للحصول على

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x+2\sqrt{2kt}\,p)e^{-p^2} dp$$

(ii) افرض أن $f(x) = T_0$ على الفترة $(-a,a)$، حيث T_0 ثابت، وأن $f(x) = 0$ خارج الفترة $[-a,a]$. استخدم تعريف دالة الخطأ في التمرين 5.1.7 للحصول على التمثيل

$$u(x,t) = \frac{T_0}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{2\sqrt{kt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{2\sqrt{kt}}\right)\right]$$

(iii) ابحث سلوك في الدالة $u(x,t)$ عندما $|x| \to \infty$ وعندما $t \to \infty$، ثم قدم تفسيرًا فيزيائيًا لذلك السلوك.

لا يكتب في
هذا الهامش

(2) تعديل المساواة:

$$\tilde{\psi}_n(\xi) = (-1)^n \sqrt{2\pi}\, \psi_n(\xi)$$ Hermite function of order n, $n \in \mathbb{N}$

تصحيح: استخدم مثال (6-5) والاستقراء على n

(5) $z \Rightarrow x-y$ ، $b \longrightarrow kt$

(6) أكمل دون:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_0^\infty f(y)\left[e^{-\frac{(y-x)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(y+x)^2}{4kt}} \right] dy$$

6.19 Equation (6.31) implies that $\left\|\hat{f}\right\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 = 2\pi \|f\|^2$.

6.21 $\psi_n(x)$ decays exponentially as $|x| \to \infty$, so it belongs to $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ and $\hat{\psi}$ therefore exists. From Example 6.17 we have $\hat{\psi}_0(\xi) = \sqrt{2\pi}\psi_0(\xi)$. Assuming $\hat{\psi}_n(\xi) = (-i)^n\sqrt{2\pi}\psi_n(\xi)$, we have

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_{n+1}(\xi) &= \mathcal{F}\left(e^{-x^2/2}H_{n+1}(x)\right)(\xi) \\
&= \mathcal{F}\left[e^{-x^2/2}(2xH_n(x) - H_n'(x))\right](\xi) \\
&= \mathcal{F}\left[x\psi_n(x) - \psi_n'(x)\right](\xi) \\
&= i\hat{\psi}_n'(\xi) - i\xi\hat{\psi}_n(\xi) \\
&= (-i)^{n+1}\sqrt{2\pi}[-\psi_n'(\xi) + \xi\psi_n(\xi)] \\
&= (-i)^{n+1}\sqrt{2\pi}\psi_{n+1}(x),
\end{aligned}$$

where we used the identity $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$ and Theorem 6.15. Thus, by induction, $\hat{\psi}_n(\xi) = (-i)^n\sqrt{2\pi}\psi_n(\xi)$ is true for all $n \in \mathbb{N}_0$.

6.23 Define the integral $I(z) = \int_0^\infty e^{-b\xi^2}\cos z\xi \, d\xi$ and show that it satisfies the differential equation $I'(z) = -zI(z)/2b$, whose solution is $I(z) = I(0)e^{-z^2/4b}$, where $I(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/b}$. 6.42

6.25 The boundary condition at $x = 0$ implies $A(\lambda) = 0$ in the representation of $u(x,t)$ given by (6.39), so that u is now an odd function of x. By extending $f(x)$ as an odd function from $(0, \infty)$ to $(-\infty, \infty)$ we can see that $B(\lambda)$ is the sine transform of f and the same procedure followed in Example 6.18 leads to the desired result.

6.27 The transformed wave equation $\hat{u}_{tt}(\xi,t) = -c^2\xi^2\hat{u}(\xi,t)$ under the given initial conditions is solved by $\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\cos c\xi t$. Taking the inverse Fourier transform yields the required representation of u.

Chapter 7

7.1 (a) $\dfrac{2a^2}{s^3} + \dfrac{2ab}{s^2} + \dfrac{b^2}{s}$.

(d) $\dfrac{1}{s^2+4}$.

(g) $\dfrac{2s}{(s^2-1)^2}$.

(i) $\sqrt{\pi/s}$.

تطبيقات تحويل وتكامل فورييه في حل بعض المعادلات التكاملية .

احل بعض 4

مثال : اوجد حل المعادلات التكاملية

$$\hat{f}(\xi) = \int_0^\infty f(x)\cos(x\xi)\,dx = \begin{cases} 1, & 0<\xi<\pi \\ 0, & \pi<\xi<\infty \end{cases}$$

$A(\lambda) = 2\int_0^\infty f(x)\cos$

مجهول $f(x) = ??$

$$\frac{\hat{f}(\xi)}{2} = A(\xi) - iB(\xi)$$

$$\hat{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x\xi)\,dx = \frac{2}{2}\int_0^\infty f(x)\cos(x\xi)\,dx$$

اذاً

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} 2, & 0<\xi<\pi \\ 0, & \pi<\xi<\infty \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}(\xi)\cos(x\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\cos(x\xi)\,d\xi = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(x\xi)}{x}\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\sin(\pi x)}{x}$$

لن نثبت هذه النظرية ولن نحتاج إلى استخدامها لإيجاد f(x) عندما تكون F(s) معلومة ، وإنما سنعتمد على جداول تحويلات لابلاس في ذلك. لكن تدل النظرية على أن تحويل لابلاس

$$f \overset{\mathscr{L}}{\mapsto} F$$

متباين ، بمعنى أن

$$F_1 = F_2 \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}[F_1] = \mathscr{L}^{-1}[F_2]$$

أي أن الدوال المختلفة لها تحويلات مختلفة ، على افتراض أن هذه الدوال تتمتع بخواص الملوسة المنصوص عليها آنفا. وبناء على ذلك نستطيع أن نكتب

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right] = \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

حيث نعتبر الطرف الأيمن مساويا للعدد 1 عندما $n = 1$ ، كما أن

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2 - a^2}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})$$

$$= \sinh ax$$

تمارين (7.1)

أوجد تحويل لابلاس لكل من الدوال في التمارين (1) إلى (8):

$$f(x) = (a+bx)^2 \qquad (1)$$

$$f(x) = \sin^2 x \tag{2}$$

$$f(x) = \sin x \cos x \tag{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} c & 0 < x < a \\ 0 & a < x < \infty \end{cases} \tag{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} a - \dfrac{a}{b}x & , \quad 0 < x < b \\ 0 & , \quad x > b \end{cases} \tag{5}$$

$$f(x) = x \cos x \tag{6}$$

$$f(x) = x^2 e^x \tag{7}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad , \quad x > 0 \tag{8}$$

ملحوظة: يدل التمرين الأخير على أن محدودية الدالة $e^{-\alpha x}f(x)$ على $(0,\infty)$ ليس ضرورية لوجود $\mathscr{L}[F]$.

أوجد $\mathscr{L}^{-1}[F]$ لكل من الدوال في التمارين من (9) إلى (15):

$$F(s) = \frac{a}{s+b} \tag{9}$$

$$F(s) = \frac{2s-5}{s^2-9} \tag{10}$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)} \tag{11}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2+2s} \tag{12}$$

$$F(s) = \frac{3(s-1)}{s^2-6} \tag{13}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^{3/2}} \qquad (14)$$

$$F(s) = \frac{14s^2 + 55s + 51}{2s^3 + 12s^2 + 22s + 12} \qquad (15)$$

(7.2) خواص الاشتقاق والانسحاب

نقدم في النظرية التالية تأثر تحويل لابلاس بالاشتقاق والتكامل.

نظرية (7.2)

(i) افرض أن الدالة f متصلة وأن $e^{-\alpha x}f(x)$ محدودة على $[0,\infty)$ لثابت ما α. إذا كانت المشتقة f' متصلة قطعيا فإن

$$\mathscr{L}[f'] = s\mathscr{L}[f] - f(0) \quad , \quad s > \alpha \qquad (7.6)$$

(ii) إذا كانت الدالة f متصلة قطعيا والدالة $e^{-\alpha x}f(x)$ محدودة على $[0,\infty)$ فإن

$$\mathscr{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{1}{s}\mathscr{L}[f(x)] \quad , \quad x > 0 \; , \; s > \alpha \qquad (7.7)$$

البرهان

(i) واضح من المعطيات أن شروط وجــــود $\mathscr{L}\,[f']$ محققة. باستخدام التكامل بالتجزيء نجد أن

$$\mathscr{L}[f'] = \int_0^\infty e^{-sx} f'(x)dx \quad , \quad s > \alpha$$

$$= e^{-sx} f(x)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

$$= s\mathscr{L}[f] - f(0)$$

لا يكتب في
هذا الهامش

1 ~~(a)~~ $\frac{2a^2}{s^3} + \frac{2ab}{s^2} + \frac{b^2}{s}$

3 $\frac{1}{s^2+4}$

8 $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$

10 $2\cosh 3x - \frac{5}{3}\sinh 3x$

12 $\frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$

14 $2\sqrt{\frac{\cancel{x}}{\pi}}$

تدريب : ارسم الدالة $y(t)$.

مثال (7.5)

تتحول معادلة لاقير

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad , \quad x > 0$$

بتأثير $\mathcal{L}$ إلى

$$\frac{d}{ds}[s^2Y - sy(0) - y'(0)] + sY - y(0) + \frac{d}{ds}[sY - y(0)] + nY = 0$$

$$-2sY - s^2Y' + y(0) + sY - y(0) + Y + sY' + nY = 0$$

$$(s-s^2)Y' + (n+1-s)Y = 0$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{n+1-s}{s(s-1)} = \frac{n}{s-1} - \frac{n+1}{s}$$

$$Y(s) = c\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$$

$$\Rightarrow y(x) = c\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\right]$$

$$= ce^x\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^n}{(s+1)^{n+1}}\right]$$

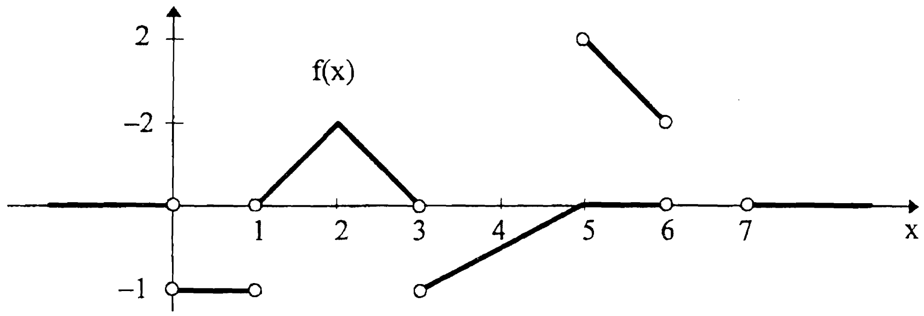
$$= \frac{c}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$$

وباختيار $c = 1$ نحصل على الصيغة (4.26) لكثيرات حدود لاقير.

تمارين (7.2)

(1) عبر عن الدوال التالية بدلالة دالة الوحدة الدرجية u.

(i)



شكل (7.3)

$$\text{(ii)} \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad 0 < x < 2 \\ \cos \pi x & , \quad 2 < x < 7/2 \\ \sin \pi x & , \quad 7/2 < x < 9/2 \\ (2/9)x & , \quad x > 9/2 \end{cases}$$

(2) ارسم الدوال التالية ثم اوجد تحويل لابلاس لكل منها

(i) $(x-1)u(x-1)$

(ii) $(x-1)^2u(x-1)$

(iii) $x^2u(x-1)$

(iv) $e^{-x}u(x-2)$

(v) $u(x-1)\sinh x$

(vi) $u(x-\frac{\pi}{2})\cos x$

(3) ارسم الدوال التالية التي يفترض أنها 0 خارج الفترة المعطاة، ثم اوجد تحويل لابلاس لكل منها

(i) $e^x \quad , \quad 0 < x < 1$

(ii) $x^2 \quad , \quad 1 < x < 2$

(iii) $1 - e^{-x} \quad , \quad 0 < x < 1$

(iv) $\cos \pi x \quad , \quad 1 < x < 2$

(4) أوجد تحويل لابلاس العكسي لكل من

(i) e^{-6s}/s^3

(ii) $\dfrac{e^{-s}}{s^2+2s+2}$

(iii) $\dfrac{1}{s}(e^{-3s}+e^{-s})$

(iv) $\dfrac{1}{s-1}(e^{-3s}+e^{-s})$

(v) $\dfrac{1+e^{-\pi s}}{s^2+9}$

(5) أوجد الحل لكل مما يلي

(i) $y''+4y'+5y=0 \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=1$

(ii) $9y''-6y'+y=0 \quad , \quad y(0)=3 \quad , \quad y'(0)=1$

(iii) $y''+4y'-10y=12\cos 2x \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=3$

(iv) $y''+2y'-8y=-256x^3 \quad , \quad y(0)=15 \, , \, y'(0)=36$

(v) $y''+2y'-8y=-e^{-3x}+3e^{-5x} \quad , \quad y(0)=4 \quad , \quad y'(0)=-2$

(vi) $y''+2y'+2y=x[u(x)-u(x-1)]$

(vii) $y''+y=\begin{cases} \sin x & , \ 0<x<\pi \\ -2\sin x & , \ x>\pi \end{cases} \quad , y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=1$

(6) استخدم المعادلة (7.9) أو المعادلة (7.10) لإيجاد تحويل تحويل لابلاس العكسي لكل من

(i) $\dfrac{s}{(s^2+9)^2}$

(ii) $\log\dfrac{s+a}{s+b}$

(iii) $\log\dfrac{s}{s-1}$

(iv) $\cot^{-1}(s+1)$

(7) تعرَّف الدالة $Si : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بالتكامل المعتل

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

وتسمى **تكامل الجيب** (Sine integral). أثبت أن

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \tan^{-1}\frac{1}{s}$$

$$\mathscr{L}[Si(x)] = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

(8) افرض أن كلا من الدالتين f و g تتلاشى على $(-\infty,0)$. يترتب على ذلك أن **التفاف** الدالتين (convolution)

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$$

$$= \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

إذا كان $\mathscr{L}[f]$ و $\mathscr{L}[g]$ موجودان فأثبت أن

$$\mathscr{L}[f*g] = \mathscr{L}[f]\,.\,\mathscr{L}[g]$$

(9) إذا كانت الدالـــــة f دورية في p، بمعنى أن $f(x+p) = f(x)$ لكل $x \geq 0$، فأثبت أن

$$\mathscr{L}[f] = \frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-sx} f(x)dx \quad , \quad s > 0$$

(10) افرض أن $f(x) = x$ لكل $0 \leq x < 1$، $f(x+1) = f(x)$ لكل $x \geq 0$، $f(x) = 0$ لكل $x < 0$. أوجد $\mathscr{L}[f]$.

(11) إذا كانت $f(x) = e^x$ و $g(x) = 1/\sqrt{\pi x}$ فأثبت أن

$$f*g(x) = e^x \operatorname{erf}(\sqrt{x})$$

استنتج من ذلك صيغة $\mathscr{L}[e^x \operatorname{erf}\sqrt{x}]$ وكذلك $\mathscr{L}[\operatorname{erf}\sqrt{x}]$

(12) أوجد $\mathscr{L}[[x]]$ ، حيث $[x]$ هو الجزء الصحيح من العدد (غير السالب) x ، أي أن

$$[x] = n \qquad \forall\, x \in [n, n+1) \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

7.2 (b) $2\cosh 3x - \dfrac{5}{3}\sinh 3x.$

(d) $\dfrac{1}{2}\left(1-e^{-2x}\right).$

(f) $2\sqrt{x/\pi}.$

7.5 $f(x) = x[H(x) - H(x-1)] + e^{1-x}H(x-1).$

$$\mathcal{L}(f)(\xi) = \frac{1}{s^2}\left(1-e^{-s}\right) - \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s+1}e^{-s}.$$

4(iii) س

7.6 (c) $H(x-3) + H(x-1).$

7.7 If f has jump discontinuities at the points $x_1, \ldots, x_n$ then the sum $f(x_1^-) - f(x_1^+) + \cdots + f(x_n^-) - f(x_n^+)$ has to be added to the right-hand side of (7.6).

7.8 (e) $y(x) = H(x-1)\left[\dfrac{1}{2}e^{2(x-1)} - e^{x-1} + \dfrac{1}{2}\right] - e^x + e^{2x}.$

6(ii) س

7.9 (c) $\dfrac{1}{x}\left(e^{-bx} - e^{-ax}\right).$

9 س

7.11 (a) Write

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_{np}^{(n+1)p} f(x)e^{-sx}dx \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^p f(x+np)e^{-s(x+np)}dx,\end{aligned}$$

then use the equation $f(x+np) = f(x)$ to arrive at the answer.

10 س

(b) $\mathcal{L}(f) = \dfrac{1}{1-e^{-s}}\left[\dfrac{1}{s^2}(1-e^{-s}) - \dfrac{e^{-s}}{s}\right].$

7.13 The left-hand side is the convolution of x^3 and $y(x)$. Applying Theorem 7.14 gives $3!Y(s)/s^4 = F(s)$, from which $Y(s) = s^4F(s)/6$. From Corollary 7.7 we conclude that

$$y(x) = \frac{1}{6}f^{(4)}(x) + \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}[f(0^+)s^3 + f'(0^+)s^2 + f''(0^+)s + f'''(0^+)].$$

The integral expression for $f(x)$ implies that $f^{(n)}(0^+) = 0$ for $n = 0, 1, 2, 3$ (we also know from Exercise 7.12 that s^n cannot be the Laplace transform of a function in $\mathcal{E}$ for any $n \in \mathbb{N}_0$). Assuming that f is differentiable to fourth order (or that y is continuous), the solution is $y(x) = f^{(4)}(x)/6$.

12

7.15 $\mathcal{L}([x])(s) = \dfrac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$.

7.17 $u(x,t) = H(t - x/c)\cos^2(t - x/c)$.

7.19 $u(x,t) = e^{-x/c}H(t - x/c)\sin(t - x/c)$.

7.21 $F(s) = e^{-a\sqrt{s}}/\sqrt{s}$ is analytic in the complex plane cut along the negative axis $(-\infty, 0]$. Using Cauchy's theorem, the integral along the vertical line $(\beta - i\infty, \beta + i\infty)$ can be reduced to two integrals, one along the bottom edge of the cut from left to right, and the other along the top edge from right to left. This yields

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(F)(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)e^{sx}\,ds \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos a\sqrt{s}}{\sqrt{s}}e^{-sx}ds \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-xt^2}\cos at\ dt.\end{aligned}$$

Noting that the last integral is the Fourier transform of e^{-xt^2}, and using the result of Example 6.17, we obtain the desired expression for $\mathcal{L}^{-1}(F)(x)$.

if either f or g is (piecewise) continuous, and (piecewise) smooth if either f or g is (piecewise) smooth (Exercise 7.16).

If $f(x)$ and $g(x)$ are dominated as $x \to \infty$ by $e^{\alpha x}$, then one can easily check that $f * g(x)$ will be dominated by $e^{\beta x}$ for any $\beta > \alpha$. Consequently, if f and g belong to $\mathcal{E}$, then so does their convolution $f * g$, and its Laplace transform is given by

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f * g)(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^x f(t)g(x-t)dtdx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty H(x-t)f(t)g(x-t)e^{-sx}dtdx \\ &= \int_0^\infty f(t) \int_0^\infty g(y)e^{-s(t+y)}dydt \\ &= \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)(s).\end{aligned}$$

In the third equality, the order of integration is reversed, and this is justified by the uniform convergence of the double integral on $\operatorname{Re} s \geq \beta + \varepsilon$ for any positive ε. Thus we have proved the following convolution theorem which corresponds to Theorem 6.22 for the Fourier transformation.

Theorem 7.14

Let $f, g \in \mathcal{E}$. If $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$ and $\mathcal{L}(g)(s) = G(s)$, then

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = F(s)G(s).$$

Now we can go back to Equation (7.19) to conclude that

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-x\sqrt{s/k}}F(s)\right)(t) \\ &= f * \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-x\sqrt{s/k}}\right)(t).\end{aligned}$$

The function $\mathcal{L}^{-1}(e^{-x\sqrt{s/k}})(t)$ can be evaluated by using the inversion formula (7.4), which requires some manipulations of contour integrals (see Exercise 7.21), or it may be looked up in a table of Laplace transforms. In either case

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-x\sqrt{s/k}}\right)(t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi k t^3}} e^{-x^2/4kt},$$

hence

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi k}} \int_0^t f(t-\tau)\tau^{-3/2}e^{-x^2/4k\tau}d\tau. \tag{7.20}$$

Here the solution u differs considerably from that in the first two cases. It tends to 0 as $x \to \infty$ at any time t and also as $t \to \infty$ at any point x, and the signal