Techniques of Integration
طرائق التكامل
Math 111
Lecture 13

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

تذكير بالقائمة القياسية للتكامل

$$\int u^n\,du=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C,(n\neq -1)\ (١) \qquad \int \frac{1}{u}\,du=\ln|u|+C\ (٢)$$

$$\int e^u\,du=e^u+C\ (٣) \qquad \int a^u\,du=\frac{1}{\ln a}a^u+C,(a>0)\ (٤)$$

$$\int \sin u\,du=-\cos u+C\ (٥) \qquad \int \cos u\,du=\sin u+C\ (٦)$$

$$\int \tan u\,du=\ln|\sec u|+C\ (٧) \qquad \int \cot u\,du=\ln|\sin u|+C\ (٨)$$

$$\int \sec u\,du=\ln|\sec u+\tan u|+C\ (٩) \qquad \int \csc u\,du=\ln|\csc u-\cot u|+C\ (١٠)$$

$$\int \sec u\tan u\,du=\sec u+C\ (١١) \qquad \int \csc u\cot u\,du=-\csc u+C\ (١٢)$$

$$\int \sec^2 u\,du=\tan u+C\ (١٣) \qquad \int \csc^2 u\,du=-\cot u+C\ (١٤)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du=\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C\ (١٥) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\,du=\sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C\ (١٦)$$

$$\int \frac{1}{a^2-u^2}\,du=\frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C \quad (١٨) \qquad \int \frac{1}{a^2+u^2}\,du=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C \quad (١٧)$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\,du=\frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C \quad (١٩)$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{a^2-u^2}}\,du=-\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{|u|}{a}\right)+C \quad (٢٠)$$

$$\int \sinh u\,du=\cosh u+C \quad (٢٢) \qquad \int \cosh u\,du=\sinh u+C \quad (٢١)$$

$$\int \coth u\,du=\ln|\sinh u|+C \quad (٢٤) \qquad \int \tanh u\,du=\ln(\cosh u)+C \quad (٢٣)$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u\,du=\tanh u+C \quad (٢٦) \qquad \int \operatorname{sech} u\,du=\tan^{-1}|\sinh u|+C \quad (٢٥)$$

$$\int \operatorname{sech} u\tanh u\,du=-\operatorname{sech} u+C \quad (٢٨) \qquad \int \operatorname{csch}^2 u\,du=-\coth u+C \quad (٢٧)$$

$$\int \operatorname{csch} u\coth u\,du=-\operatorname{csch} u+C \quad (٢٩)$$

طرائق التكامل:

(١) التكامل بالتجزئ:

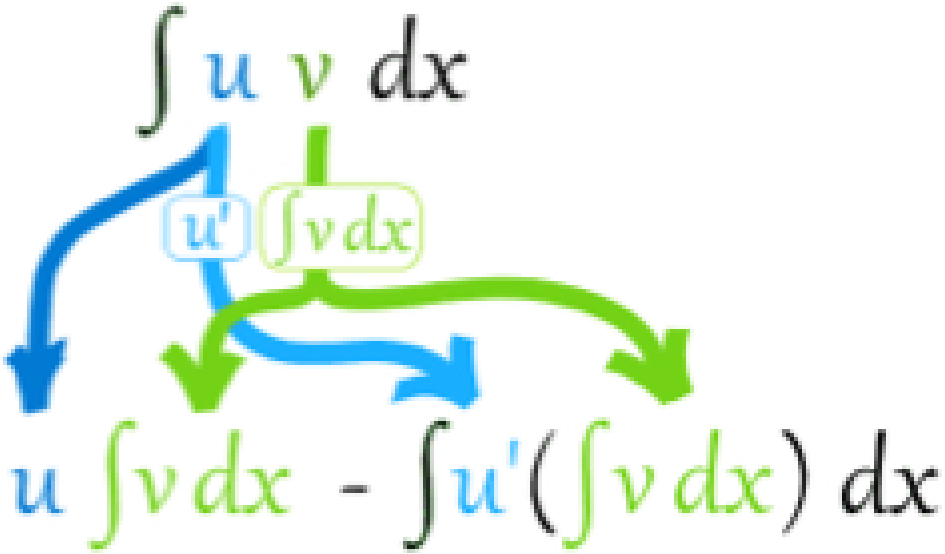
Integration by Parts:

إذا كان لدينا التكامل يحتوي على حاصل ضرب دالتين بدلالة x وكان من الصعب استخدام طريقة التعويض لحلها(اي بمعني أن حاصل ضرب الدالتين احدهما ليست مشتقة الاخرى) فعند إذاً نلجا الي طرق التكامل الاخرى ومنها طريقة التكامل بالتجزئ والتي تعتمد على المبرهنة التالية:

مبرهنة:

إذا كان $u = f(x)$ و $v = g(x)$ وكانت كل من f' و g' متصلة فإن :

$$\int udv = uv - \int vdu.$$



ملاحظة:

دائماً نختار u بحيث يكون من السهل اشتقاقها و نختار dv بحيث يكون من السهل تكاملها.

Examples

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1)\ \int x \sin x \ dx \ ,$$

$$(2)\ \int (4x^3 + 2x + 1) \ln x \ dx.$$

(3) $\int xe^x \, dx.$

(4) $\int x^2 e^{2x} \, dx.$

(5) $\int x^n e^x \, dx.$

(6) $\int \ln x \, dx.$

Exercises

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

(1) $\int x^2 \sin 4x \; dx$,

(2) $\int e^{4x} \sin 5x \; dx.$

(3) $\int x(2x+3)^{99} \; dx.$

(4) $\int x \sec x \tan x \; dx.$

(5) $\int \sqrt{x} \ln x \; dx.$

(6) $\int (\ln x)^2 \; dx.$

Thanks for listening.