الجزء الثاني (١٢ درجة): صنف النقاط الشاذة (في $\mathbb{C}$) للدوال التالية ثم احسب رواسبها:

١) $f(z)=\dfrac{z^n}{z^m-1},\ n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}^*$ ٢) $g(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z^2+1)}$ ٣) $h(z)=\dfrac{1}{\sin z}$.

هذا الهامش

الجزء الثاني (12 درجة)

1) $f(z)=\dfrac{z^n}{z^m-1}$. f تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{z / z^m-1=0\}$.

$z^m-1=0 \iff z^m=1$

نضع $z=Re^{i\theta}$, $R>0$,

$z^m=R^m e^{im\theta}=1=e^{2ik\pi}$

إذن $\begin{cases} R^m=1 \\ m\theta=2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R=1 \\ \theta=\dfrac{2k\pi}{m} \end{cases}$

(2) $0\le k\le m-1$, $k\in\mathbb{N}$

f لديها m قطب بسيط عند النقاط $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{m}}$

$(0\le k\le m-1)$.

• أياً كان $0\le k\le m-1$,

(2) $$Res(f,z_k)=Res\left(\frac{z^n}{z^m-1};e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$$

$$=\lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{z^n}{z^m-1}=\frac{z_k^n}{m z_k^{m-1}}=\frac{z_k^{n+1}}{m}.$$

2) $g(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z^2+1)}$, g تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{0,\pm i\}$

• $z=0$ هو قطب من الرتبة الثانية لـ g.

(2) $$Res(g,0)=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[z^2 g(z)\right]\Big|_{z=0}$$

$$=\frac{d}{dz}\left[\frac{\cos z}{z^2+1}\right]=\frac{(-\sin z)(z^2+1)-(\cos z)2z}{(z^2+1)^2}\Bigg|_{z=0}=0$$

• $z=i$ هو قطب بسيط لـ g

(1) $$Res(g,i)=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{\cos z}{z^2(z-i)(z+i)}=\frac{\cos i}{-2i}$$

$$=-\frac{1}{2i}\left[\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}\right]=\frac{i}{2}\cosh 1$$

• $z=-i$ هو قطب بسيط لـ g.

(1) $$Res(g,-i)=\lim_{z\to(-i)}(z+i)\frac{\cos z}{z^2(z-i)(z+i)}=\frac{\cos(-i)}{2i}=\frac{-i}{2}\cosh 1.$$

3) $h(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C} / \sin z=0\}$

هذا الهامش

$$\sin z = 0 \iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$$

$$\iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 = e^{2ik\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2

$$\iff z_k = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

إذن $z_k = k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ هو قطب بسيط لـ h.

2 $\quad \mathrm{Res}(h, k\pi) = \lim_{z \to k\pi} (z - k\pi)\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\cos(k\pi)} = (-1)^k,$