٦: (نظرية الرواسب)

١. في كل مما يلي: أكتب الجزء الرئيسي للدالة ونقاطها الشاذة المعزولة. حدد فيما إذا كانت النقطة قطب، أو نقطة شاذة أساسية (جوهرية)، أو نقطة شاذة قابلة للإزالة.

(أ) $z e^{\frac{1}{z}}$ (ب) $\frac{z^2}{1+z}$ (جـ) $\frac{\sin z}{z}$ (د) $\frac{\cos z}{z}$

الحل: (أ)

$$z e^{\frac{1}{z}} = z \cdot \left(1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2} + \cdots\right)$$

$$= z + 1 + \underbrace{\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^2} + \cdots}_{\text{الجزء الرئيسي}}$$

$z = 0$ نقطة شاذة معزولة.

وهي نقطة شاذة أساسية، لأن عدد الحدود غير الصفرية في الجزء الرئيسي عدد غير منته.

(ب)

$$\frac{z^2}{1+z} = z - 1 + \frac{1}{1+z}$$

$$= -2 + (z+1) - \underbrace{\frac{1}{1+z}}_{\text{الجزء الرئيسي}}$$

$z = -1$ نقطة شاذة معزولة.

وهي قطب بسيط $(m = 1)$

(جـ)

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{z - z^3/3! + z^5/5! - \cdots}{z}$$

$$= 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 - \cdots$$

لا يوجد الجزء الرئيسي.

$z = 0$ نقطة شاذة معزولة.

وهي نقطة شاذة قابلة للإزالة لأنه لا يوجد الجزء الرئيسي.

(د)

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1 - z^2/2! + z^4/4! - \cdots}{z}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{الجزء الرئيسي}} - \frac{1}{2!}z + \frac{1}{4!}z^3 - \cdots$$

$z = 0$ نقطة شاذة معزولة.

وهي قطب بسيط ($m=1$)

---

٢. أثبت أن كل النقاط الشاذة لكل من الدوال التالية هي أقطاب. حدد الرتبة m لكل قطب ، والراسب المقابل B

(أ) $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$ (ب) $\tanh z$ (جـ) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$

(د) $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ (هـ) $\dfrac{z}{\cos z}$

الحل: (أ)

$$\frac{z+1}{z(z-2)} = \frac{z+1}{z}\cdot\frac{1}{z-2}$$

$$= \left(1+\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{-1}{2(1-z/2)}$$

$$= \left(1+\frac{1}{z}\right)\cdot -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{1}{z}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^{n-1}}{2^{n+1}}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \cdots \underbrace{- \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}}_{\text{الجزء الرئيسي}} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3}z - \cdots$$

$z=0$ نقطة شاذة معزولة وهي قطب ($m=1$) ، $B=-\frac{1}{2}$

$$\frac{z+1}{z(z-2)} = \frac{1}{z}\cdot\frac{z+1}{z-2}$$

$$= \frac{1}{z}\left[1+\frac{3}{z-2}\right]$$

$$= \frac{1}{z-2+2}\left[1+\frac{3}{z-2}\right]$$

$$= \frac{1}{2\left[1+\frac{z-2}{2}\right]}\cdot\left[1+\frac{3}{z-2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{z-2}{2}\right)^n\left[1+\frac{3}{z-2}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} - \frac{(z-2)^1}{4} + \frac{(z-2)^2}{2^3} - \cdots\right]\left[1+\frac{3}{z-2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(z-2)^1}{4} + \frac{(z-2)^2}{8} - \dots + \underbrace{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z-2}}_{\text{الجزء الرئيسي}} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8}(z-2)^1 - \dots$$

$z = 2$ نقطة شاذة معزولة وهي قطب ($m = 1$) ، $B = \frac{3}{2}$

ب) $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$ ، $\cosh z = 0 \Rightarrow z = (n + \frac{1}{2})\pi i \,;\, n \in \mathbb{Z}$

هذه النقاط الشاذة المعزولة أقطاب بسيطة ($m = 1$) ؛ لأنها أصفار بسيطة لـ $\cosh z$.

ج) $$\frac{1 - e^{2z}}{z^4} = \frac{1 - [1 + 2z + (2z)^2/2! + \dots]}{z^4}$$

$$= \underbrace{\frac{-2}{z^3} - \frac{4}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{8}{6} \cdot \frac{1}{z}}_{\text{الجزء الرئيسي}} - \frac{16}{24} \cdot \frac{1}{1} - \dots$$

$z = 0$ نقطة شاذة معزولة وهي قطب ($m = 3$) ، $B = \frac{-4}{3}$.

د) $$\frac{e^{2z}}{(z-1)^2} = \frac{e^{2z-2+2}}{(z-1)^2} = \frac{e^2 \cdot e^{2(z-1)}}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{e^2}{(z-1)^2}\left[1 + 2(z-1) + \frac{2^2(z-1)^2}{2!} + \dots\right]$$

$$= \underbrace{\frac{e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{(z-1)}}_{\text{الجزء الرئيسي}} + 2e^2 + \dots$$

$z = 1$ نقطة شاذة معزولة وهي قطب ($m = 2$) ، $B = 2e^2$.

هـ) $\frac{z}{\cos z}$ ، $\cos z = 0 \Rightarrow z = (n + \frac{1}{2})\pi \,;\, n \in \mathbb{Z}$

هذه النقاط الشاذة المعزولة أقطاب بسيطة ($m = 1$) ؛ لأنها أصفار بسيطة لـ $\cos z$.

---

٣. أوجد الراسب (الباقي) عند $z = 0$ لكل من الدوال التالية :

٦: (نظرية الرواسب)

أ) $\csc^2 z$ ب) $z^{-3}\csc(z^2)$ جـ) $z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$

الحل: (أ) نستخدم العلاقة التالية:

z_0 عند f باقي $= Res(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{z^{(m-1)}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$

و z_0 قطب لـ f من الرتبة m

$f(z) = \csc^2 z = \frac{1}{\sin^2 z}$ ؛ $z=0$ قطب لـ f من الرتبة $m=2$

(لأنه صفر من الرتبة 2 لـ $\sin^2 z$)

$$\frac{d}{dz}\left[(z-0)^2/\sin^2 z\right] = 2\left(\frac{z}{\sin z}\right) \cdot \frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z}$$

$$Res(f,0) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(2-1)!}\cdot 2\left(\frac{z}{\sin z}\right)\cdot\frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z}$$

$$= 1\cdot 2\cdot 1\cdot \lim_{z\to 0}\frac{\cos z - [-z\sin z + \cos z]}{2\sin z\cos z} \quad \text{(لوبيتال)}$$

$$= 2\lim_{z\to 0}\frac{z\sin z}{2\sin z\cos z} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\cos z} = 0$$

ب) $f(z) = \frac{1}{z^3\sin(z^2)}$

$$= \frac{1}{z^3\left[z^2 - z^6/3! + z^{10}/5! - \cdots\right]}$$

$$= \frac{1}{z^5\left[1 - (z^4/3! - z^8/5! + \cdots)\right]}$$

$$= \frac{1}{z^5}\left[1 + (z^4/3! - z^8/5! + \cdots) + (z^4/3! - z^8/5! + \cdots)^2/2! + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{z^5} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{5!}z^3 + \cdots$$

$$Res(f;0) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

جـ) $f(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$

$$= z\left[1 - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{z^4} - \cdots\right]$$

$$= z - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{z^3} - \cdots$$

$$Res(f;0) = -\frac{1}{2!} = -\frac{1}{2}$$