$\alpha : |z| = 2 \Rightarrow |z-0| = 2$

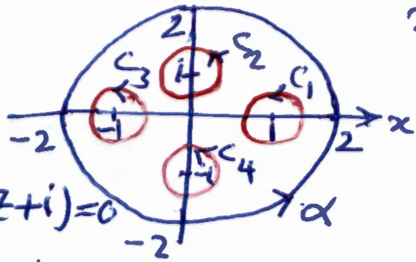
دائرة مركزها (0,0) ونصف قطرها 2

هناك طريقة أخرى لحل السؤال وهي الكسور الجزئية لكنها طويلة لوجود أربعة أقواس في المقام لكن الطريقة في الحل أقوى وأسرع !

$z^4 - 1 = 0$

$(z^2-1)(z^2+1) = 0$

$(z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0$



النقاط الشاذة هي :

$1, -1, i, -i$ (كلها داخل α) $\xrightarrow[\text{القوية}]{\text{طريقة الحل}}$ نكون أربع دوائر صغيرة حول تلك النقاط بحيث لا تتقاطع مع بعضها (بالاتجاه الموجب)

سنطبق كوشي للمناطق متعددة الترابط لدينا :

$$\int_\alpha \frac{e^z}{z^4-1}\,dz = \int_{C_1} \frac{\overbrace{\frac{e^z}{(z+1)(z^2+1)}}^{=f_1(z)}}{z-1}\,dz + \int_{C_2} \frac{\overbrace{\frac{e^z}{(z^2-1)(z+i)}}^{=f_2(z)}}{z-i}\,dz +$$

$$\int_{C_3} \frac{\overbrace{\frac{e^z}{(z-1)(z^2+1)}}^{=f_3(z)}}{z+1}\,dz + \int_{C_4} \frac{\overbrace{\frac{e^z}{(z^2-1)(z-i)}}^{=f_4(z)}}{z+i}\,dz$$

f_1 تحليلية على وداخل C_1 ، f_2 تحليلية على وداخل C_2 ،

f_3 " " " C_3 ، f_4 " " " C_4

فنطبق صيغة كوشي التكاملية على كل من التكاملات الأربعة وكل منها $n=0$:

$$\int_\alpha \frac{e^z}{z^4-1}\,dz = \frac{2\pi i}{0!} f_1(1) + \frac{2\pi i}{0!} f_2(i) + \frac{2\pi i}{0!} f_3(-1) + \frac{2\pi i}{0!} f_4(-i)$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{e}{2(2)} + 2\pi i \cdot \frac{e^{i}}{(-2)(2i)} + 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{(-2)(2)} + \frac{e^{-i}}{(-2)(-2i)} \cdot 2\pi i$$

$$= -\pi \sin(1) + i \cdot \frac{\pi}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$