الأختبار النهائي
للفصل الدراسي الثاني لعام 1439/1438هـ
اسم المقرر: معادلات تفاضلية جزئية
رقم المقرر: 425 ريض   الزمن: ثلاث ساعات

جامعة الملك سعود
King Saud University
كلية العلوم – قسم الرياضيات

أجب عن خمسة أسئلة فقط من الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: (8)

(أ) أوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية $xu_x - yu_y = 0$ المار بالمنحنى x=y=z=t

(ب) صنف المعادلة التفاضلية التالية: $4z_{xx} - 8z_{xy} + 4z_{yy} = 1$ ، ثم حولها إلى صيغتها القياسية باستخدام التحويلات: $\xi = \xi(x,y),\ \eta = \eta(x,y)$ و استنتج الحل العام.

السؤال الثاني: (8)

(أ) أثبت أن حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية

$$u_{rr} + \tfrac{2}{r}u_r + \tfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \tfrac{\cot\varphi}{r^2}u_\varphi = 0$$

يكون على الصورة:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n + B_n r^{-n-1})P_n(\cos\varphi)$$

حيث $P_n(x)$ هي كثيرة حدود ليجندر.

(ب) أوجد حل مسألة القيمة الحدية الآتية داخل كرة نصف قطرها a

$$\Delta u = 0\ ,\ 0 \le r < a\ ,\ 0 \le \varphi \le \pi$$
$$u(a,\varphi) = f(\varphi)\ ,\ 0 \le \varphi \le \pi$$

السؤال الثالث: (8)

(أ) أثبت أن مسألة القيمة الابتدائية – الحدية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\ 0<x<L\ ,\ t>0 \qquad (1)$$
$$u(0,t)=u(L,t)=0\ ,\ t>0 \qquad (2)$$
$$u(x,0)=f(x)\ ,\ 0<x<L \qquad (3)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)\ ,\ 0<x<L \qquad (4)$$

لها حل واحد على الأكثر $u(x,t)$ حيث $u \in C^2$.

(ب) أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

$$u(x,0) = \sin x \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 \qquad (3)$$

حيث $-\infty < x < \infty\ ,\ t > 0$

<u>السؤال الرابع:</u> (8)

بأستخدام تحويل لابلاس، أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = x\ ,\ \ x>0,\ t>0$$

حيث $u=u(x,t)$ تحقق الشروط الحدية الآتية:

$$u(x,0)=0\ ,\ \ x>0\ \ ;\ \ u(0,t)=0\ \ ,\ \ t>0$$

<u>السؤال الخامس:</u> (8)

أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية – الحدية التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\ \ 0<x<L\ ,\ t>0 \qquad (1)$$

$$u(0,t) = u_1,\quad u(L,t) = u_2\ ,\ \ t>0 \qquad (2)$$

$$u(x,0) = f(x)\ ,\ \ 0<x<L \qquad (3)$$

<u>السؤال السادس:</u> (8)

أوجد حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الاسطوانية والتي على الصورة التالية:

$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0$ ومن ثم استنتج أن الحل داخل منطقة محدودة باسطوانة يكون على الصورة: $u_n(r,\theta,z) = J_n(\alpha r)(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)(c_n\cosh\alpha z + d_n\sinh\alpha z),\ n=0,1,2,...$

حيث $\xi = \alpha r$, $J_n(\xi)$ هي دالة بيسيل من النوع الأول.

مع أطيب التمنيات ،،، د. عماد المهدي

نموذج إجابة الاختبار النهائي
للفصل الدراسي الثاني ١٤٣٨/١٤٣٩هـ
معادلات تفاضلية جزئية - 425 ريض

إجابة السؤال الأول

(أ)

$$x u_x - y u_y = 0, \quad x = y = z = t$$

$$\text{or } xp - yq = 0, \quad x = y = z = t$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-dy}{y} = \frac{dz}{0}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-dy}{y} \qquad \Big| \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{0}$$

$$\ln x = -\ln y + \ln c_1 \qquad \Big| \qquad x\,dz = 0$$

$$\ln xy = \ln c_1 \qquad \Big| \qquad \Rightarrow dz = 0$$

$$\Rightarrow xy = c_1 = u \qquad \Big| \qquad \Rightarrow z = c_2 = v$$

$$\Rightarrow c_1 = t^2, \quad c_2 = t$$

$$\therefore \boxed{xy = z^2}$$

(ب)

$$4z_{xx} - 8z_{xy} + 4z_{yy} = 1 \qquad \text{(I)}$$

$$A = 4, \quad B = -4, \quad C = 4$$

$$\Delta = B^2 - AC$$

$$\Delta = 16 - 16 = 0$$

∴ المعادلة مكافئة parabolic

$$m_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{A}, \quad m_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{A}$$

$$\therefore m_1 = m_2 = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -m_1 = -1 \Rightarrow dy = -dx$$

$$\therefore y + x = c_1$$

for $\boxed{\xi = u(x,y) = x+y = c_1}$

and for $\boxed{\eta = x(x+y) = c_2}$

$\Rightarrow \boxed{\xi = x+y}\ , \ \boxed{\eta = x^2+xy}$

$\xi_x = 1\ , \ \xi_y = 1\ , \ \eta_x = 2x+y\ , \ \eta_y = x$

where $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x+y & x \end{vmatrix} = -x-y \neq 0$

$z = z(\xi,\eta)$

$\Rightarrow z_x = z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x$

$\boxed{z_x = z_\xi + (2x+y) z_\eta}$

$\Rightarrow z_{xx} = z_{\xi\xi} + (4x+2y) z_{\xi\eta} + (2x+y)^2 z_{\eta\eta} + 2z_\eta$ ①

$z_y = z_\xi \xi_y + z_\eta \eta_y = \boxed{z_\xi + x z_\eta}$

$z_{yy} = z_{\xi\xi} + 2x z_{\xi\eta} + x^2 z_{\eta\eta}$ ②

$z_{xy} = z_{\xi\xi} + (3x+y) z_{\xi\eta} + x(2x+y) z_{\eta\eta} + z_\eta$ ③

Sub. ①, ②, ③ in ②

$(4x^2 + 8xy + 4y^2) z_{\eta\eta} = 1$

$\therefore 4(x+y)^2 z_{\eta\eta} = 1$

3)

$$4\xi^2 z_{\eta\eta} = 1$$

$$z_{\eta\eta} = \frac{1}{4\xi^2}$$

$$z_\eta = \frac{\eta}{4\xi^2} + f(\xi)$$

$$z = \frac{\eta^2}{8\xi^2} + f(\xi)\cdot\eta + g(\xi)$$

$$z = \frac{x^2\cancel{(x+y)^2}}{8\cancel{(x+y)^2}} + x(x+y)\,f(x+y) + g(x+y)$$

$$\therefore \boxed{z = \frac{x^2}{8} + x(x+y)f(x+y) + g(x+y)}$$

إجابة السؤال الثاني

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{\cot\varphi}{r^2}u_\varphi = 0 \quad (P)\quad ①$$

where $u = u(r,\varphi)$

let $u = R(r)\,\Phi(\varphi)$

$$① \Rightarrow R''\Phi + \frac{2}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' + \frac{\cot\varphi}{r^2}R\Phi' = 0$$

$$\frac{r^2R''}{R} + \frac{2rR'}{R} = -\left[\frac{\Phi''}{\Phi} + \cot\varphi\frac{\Phi'}{\Phi}\right] = \lambda$$

حيث $\lambda > 0$ موجبة الحل

$$\Rightarrow \frac{\Phi''}{\Phi} + \cot\varphi\frac{\Phi'}{\Phi} = -\lambda \quad (i)$$

$$\frac{r^2R''}{R} + \frac{2rR'}{R} = \lambda \quad (ii)$$

$$(i) \Rightarrow \Phi'' + \cot\varphi\,\Phi' = -\lambda\Phi \quad ②$$

$$\Rightarrow \sin\varphi\,\Phi'' + \cos\varphi\,\Phi' = -\lambda\sin\varphi\,\Phi$$

let $\boxed{\xi = \cos\varphi} \Rightarrow \begin{cases}\Phi' = -\sin\varphi\,\dfrac{d\Phi}{d\xi}\\[2mm] \Phi'' = \sin^2\varphi\,\dfrac{d^2\Phi}{d\xi^2} - \cos\varphi\,\dfrac{d\Phi}{d\xi}\end{cases}$

$$② \Rightarrow \sin^3\varphi\,\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} - 2\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{d\Phi}{d\xi} = -\lambda\sin\varphi\,\Phi$$

1

$$\sin^2\varphi \frac{d^2\Phi}{d\zeta^2} - 2\cos\varphi \frac{d\Phi}{d\zeta} + \lambda\Phi = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(1-\zeta^2)\frac{d^2\Phi}{d\zeta^2} - 2\zeta\frac{d\Phi}{d\zeta} + \lambda\Phi = 0} \quad (3)$$

والمعادلات أعلاه تسمى Legendre والتي يكون لها حل

عندما $\lambda = \lambda_n = n(n+1)$ ، $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\Rightarrow (1-\zeta^2)\frac{d^2\Phi}{d\zeta^2} - 2\zeta\frac{d\Phi}{d\zeta} + n(n+1)\Phi = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi = \Phi_n(\zeta) = P_n(\cos\varphi) \ , \ n = 0, 1, 2, \dots} \quad (4)$$

ومن المعادلة (ii)

$$\frac{r^2R''}{R} + \frac{2rR'}{R} = \lambda$$

$$\Rightarrow \frac{r^2R''}{R} + \frac{2rR'}{R} = n(n+1)$$

$$r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0 \quad (5)$$

هذه معادلة كوشي - أويلر والتي يكون حلها كالآتي:

نفرض $R = r^m$

$$\Rightarrow R' = mr^{m-1} \ , \ R'' = m(m-1)r^{m-2}$$

$$(5) \Rightarrow m(m-1) + 2m - n(n+1) = 0$$

$$\dots$$

$$\Rightarrow (m-n)(m+n+1) = 0$$

$$\Rightarrow m = n \ , \ m = -n-1$$

فيكون الحل العام

$$\boxed{R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n-1}} \quad (6)$$

$$(4), (6) \Rightarrow U_n(r,\varphi) = (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n(\cos\varphi)$$

وعليه فإن الحل الكلي للمعادلة (1) هو

$$U(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n(\cos\varphi)$$

حسب مبدأ التراكب للحلول. #

(ب) الحل المتماثل لمعادلة لابلاس ∇^2 في الإحداثيات الكروية $(\theta=0)$ هو

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^{n}+B_n r^{-n-1}\right)P_n(\cos\varphi)$$

* لكي تكون u متوافقة عند مركز الكرة يلزم أن يكون $B_n=0$

$$\Rightarrow u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^{n}P_n(\cos\varphi) \qquad ①$$

الشرط الحدي هو at $r=a,\ u(a,\varphi)=f(\varphi)$

$$\Rightarrow f(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n a^{n}P_n(\cos\varphi)$$

$$\because f(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\langle f,P_n\rangle P_n(\cos\varphi)$$

$$\forall f\in L^2(-1,1)$$

$$\Rightarrow \therefore A_n a^{n}=\frac{2n+1}{2}\langle f,P_n\rangle$$

$$\Rightarrow A_n a^{n}=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(\varphi)P_n(\cos\varphi)\,d\cos\varphi$$

$$A_n a^{n}=\frac{2n+1}{2}\int_{0}^{\pi}f(\varphi)P_n(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$

$$A_n=\frac{2n+1}{2a^{n}}\int_{0}^{\pi}f(\varphi)P_n(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi \qquad ②$$

$\therefore$ ①، ② تحددان الحل المطلوب.

#

اجابة السؤال الثالث

(P) نفرض $u, v \in C^2$ حلين للمسألة الابتدائية - الحدية ①-④

ونفرض $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ ⑤

حيث $w(x,t) \in C^2$ تحقق

$$\begin{aligned} &w(0,t) = w(L,t) = 0 \\ &w(x,0) = 0, \ \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0 \end{aligned} \qquad ⑥$$

for $0 \le x \le L, \ t \ge 0$

الطاقة الكلية للخيط المهتز عند زمن $t \ge 0$

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \Big[\underbrace{\alpha^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}_{\text{طاقة الوضع (الكامنة) pot. energy}} + \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2}_{\text{طاقة الحركة K.E}}\Big] dx \qquad ⑦$$

$⑥, ⑦ \Rightarrow E(0) = 0$ at $t = 0 \longrightarrow$ (i)

حيث $w(x,t)$ تمثل الإزاحة في الخيط المهتز عند الموضع x للزمن t

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L \left[\alpha^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] dx$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L \left[\alpha^2 w_x w_{xt} + w_t w_{tt}\right] dx$$

$$\int_0^L \alpha^2 w_x w_{xt}\, dx = \cancelto{0}{\Big[\alpha^2 w_x w_t\Big]_0^L} - \int_0^L w_t \alpha^2 w_{xx}\, dx$$

$$\int w_{xt}\, dx = \int \frac{\partial w_t}{\partial x} dx = w_t \ldots$$

Not that: $w_x(0,t) = w_x(L,0) = 0$,

$$\therefore \frac{dE}{dt} = \int_0^L w_t \left[w_{tt} - \alpha^2 w_{xx}\right] dx$$

لكن w تحقق المعادلة الموجية

$$w_{tt} = \alpha^2 w_{xx}$$

$$\therefore \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\therefore E(t) = c, \quad c \text{ is Const.} \longrightarrow (ii)$$

أي أن الطاقة الكلية للخيط المهتز تكون محافظة Conservative

من (i) و (ii) ⇐

$$E(t) = 0$$

$$(7) \Rightarrow E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\alpha^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] dx = 0$$

$$\therefore \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

$$\text{for } 0 \le x \le L, \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow w(x,t) = k, \quad k \text{ is Const.}$$

$$\because w(x,0) = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\Rightarrow w(x,t) = 0$$

$$\Rightarrow u(x,t) - v(x,t) = 0$$

$$\Rightarrow u(x,t) = v(x,t)$$

أي أن المسألة الابتدائية -الحدية المعطاه لها حل واحد على الأكثر .

#

(ب)

$$\alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+2t) + \sin(x-2t)\right] + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} ds$$

باستخدام صيغة دالمبير

$$= \frac{1}{2}\left[\sin x \cos 2t + \cancel{\cos x \sin 2t} + \sin x \cos 2t - \cancel{\cos x \sin 2t}\right]$$

$$u(x,t) = \sin x \cos 2t + t$$

#

اجابة السؤال الرابع

نأخذ تحويل لابلاس بالنسبة الى t للطرفين واستخدام العلاقتين

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = s\bar{u}(x,s) - u(x,0)$$

$$\bar{u}(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\} \quad \text{حيث}$$

$$\& \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{d}{dx}\bar{u}(x,s)$$

$$\Rightarrow \quad s\bar{u}(x,s) - \cancel{u(x,0)}^{\,0} + x\frac{d}{dx}\bar{u}(x,s) = \frac{x}{s}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\bar{u}}{dx} + \frac{s}{x}\bar{u}(x,s) = \frac{1}{s}$$

اذن يمكن حل هذه المعادلة باستخدام العامل المكامل

$$I.F = \mu = e^{\int \frac{s}{x}dx} = x^s$$

$$\therefore \quad x^s\,\bar{u}(x,s) = \int \frac{1}{s}x^s\,dx$$

$$x^s\,\bar{u}(x,s) = \frac{1}{s}\left(\frac{x^{s+1}}{s+1}\right) + A$$

$$\Rightarrow \quad \bar{u}(x,s) = \frac{1}{s}\left(\frac{x}{s+1}\right) + \frac{A}{x^s}$$

$$\because \quad \bar{u}(0,s) = \int_0^\infty u(0,t)\,e^{-st}\,dt = 0$$

0 من الشرط الحدي

$$\therefore \quad \boxed{A = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{u}(x,s) = \frac{1}{s}\left(\frac{x}{s+1}\right)$$

باستخدام الكسور الجزئية

$$\bar{u}(x,s) = \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]x$$

$$\therefore \quad u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)x\right\}$$

$$\therefore \quad u(x,t) = x\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - x\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$u(x,t) = x(1 - e^{-t})$$

وهو الحل المطلوب

#

إجابة السؤال الخامس

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t) \qquad (4)$$

الحل المستقر   الحل الانتقالي

بالتعويض من (4) في المعادلات من (1) إلى (3) نحصل على

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow \dfrac{\partial w}{\partial t} = \beta v''(x) + \beta \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0<x<L,\ t>0 & (5) \\ (2) \Rightarrow v(0) + w(0,t) = u_1,\ v(L) + w(L,t) = u_2,\quad t>0 & (6) \\ (3) \Rightarrow v(x) + w(x,0) = f(x),\quad 0<x<L & (7) \end{cases}$$

نوجد $t \to \infty$

$$(5) \Rightarrow v''(x) = 0, \qquad (6) \Rightarrow v(0) = u_1,\ v(L) = u_2$$

$$\Rightarrow v'(x) = A$$

$$v(x) = Ax + B$$

$$v(0) = B = u_1 \Rightarrow \boxed{B = u_1}$$

$$v(L) = AL + u_1 = u_2 \Rightarrow A = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

$$\therefore v(x) = u_1 + \left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right) x \qquad (8)$$

... وهو الحل المستقر

وتصبح مسألة القيم الابتدائية - الحدية (9) - (11) مع الصورة

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \beta \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0<x<L,\ t>0 & (9) \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, \quad t>0 & (10) \\ w(x,0) = f(x) - u_1 - \left(\dfrac{u_2 - u_1}{L}\right) x & (11) \end{cases}$$

والشروط الحدية

$$\Rightarrow w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\beta \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (12)$$

وهو الحل الانتقالي ...

10

$$(11) \Rightarrow w(x,0) = f(x) - u_1 - \left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right)x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f(x) - u_1 - \left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right)x$$

Fourier sine Series

$$\therefore C_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x) - u_1 - \left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right)x\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad (13)$$

$$, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

حيث C_n هي معاملات فورير

∴ يتحدد الحل لمسألة القيمة الابتدائية - الحدية والمعطاه بالمعادلات

(8) , (12) , (13)

#

إجابة السؤال السادس

معادلة لابلاس في الإحداثيات الاسطوانية هي

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

let $u(r,\theta,z) = \phi(r,\theta) Z(z)$

$$(1) \Rightarrow \phi_{rr} Z + \frac{1}{r}\phi_r Z + \frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta} Z + \phi Z'' = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{Z''}{Z} = -\frac{\phi_{rr} + \left(\frac{1}{r}\right)\phi_r + \left(\frac{1}{r^2}\right)\phi_{\theta\theta}}{\phi} = \lambda} \quad (2)$$

λ ثابت الفصل $(\lambda = \alpha^2)$ ،

$$Z'' = \alpha^2 Z \Rightarrow \boxed{Z = E e^{\alpha z} + F e^{-\alpha z}} \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow \phi_{rr} + \left(\frac{1}{r}\right)\phi_r + \frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta} = -\lambda\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_{rr} + \left(\frac{1}{r}\right)\phi_r + \frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta} + \lambda\phi = 0} \quad (4)$$

لحل المعادلة (4) نستخدم طريقة فصل المتغيرات

$$\phi = R(r)\,\Theta(\theta)$$

$$(4) \Rightarrow R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' + \alpha^2 R\Theta = 0$$

$\lambda = \alpha^2$

$$\Rightarrow \frac{r^2R'' + rR'}{R} + \alpha^2 r^2 = \frac{-\Theta''}{\Theta} = \mu \quad (5)$$

حيث μ ثابت الفصل $(\mu = n^2)$

$$\Rightarrow \boxed{r^2R'' + rR' + (\alpha^2 r^2 - n^2)R = 0} \quad (6)$$

$$(5) \Rightarrow \Theta'' = -n^2\Theta \quad , n = 0,1,2,\dots$$

12

$$\Rightarrow \boxed{\Theta = C\cos n\theta + D\sin n\theta} \quad (7)$$
$$n = 0, 1, 2, \dots$$

For Eq (6) $\Rightarrow r^2R'' + rR' + (\alpha^2r^2 - n^2)R = 0$

let $\boxed{\xi = \alpha r}$

$$\Rightarrow R' = \frac{dR}{d\xi}\frac{d\xi}{dr} = \alpha\frac{dR}{d\xi}$$

$$\Rightarrow R'' = \alpha^2\frac{d^2R}{d\xi^2}$$

$$(6) \Rightarrow \alpha^2r^2\frac{d^2R}{d\xi^2} + \alpha r\frac{dR}{d\xi} + (\alpha^2r^2 - n^2)R = 0$$

$$\therefore \xi^2\frac{d^2R}{d\xi^2} + \xi\frac{dR}{d\xi} + (\xi^2 - n^2)R = 0$$

which is Bessel Eqn of order n

فيكون حله هو

$$\Rightarrow \boxed{R = AJ_n(\xi) + BY_n(\xi)}, \; n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

$$\Rightarrow \boxed{R = AJ_n(\alpha r) + BY_n(\alpha r)} \quad (9)$$

باستخدام المعادلات (3) ، (7) ، (9) نحصل على الحل بالصيغة التالية:

$$u(r,\theta,z) = R(r)\,\Theta(\theta)\,Z(z)$$

$$u(r,\theta,z) = \left[AJ_n(\alpha r) + BY_n(\alpha r)\right]\left[C\cos n\theta + D\sin n\theta\right] \cdot \left[Ee^{\alpha z} + Fe^{-\alpha z}\right] \quad (10)$$

$$r > 0, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

13

ولكي يكون الحل متصلاً يلزم وضع $B=0$ حيث ان دالة بيسل من النوع الثاني $Y_n(\alpha r)$ غير محدودة عند $r=0$

كما يمكن كتابة الحل المقترح للمتغيرات باستخدام الدوال الزائدية فيصبح الحل على الصورة

$$u_n(r,\theta,z)=J_n(\alpha r)\,(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

$$\cdot(c_n\cosh\alpha z+D_n\sinh\alpha z)$$

#